J. reine angew. Math. **693** (2014), 151–226
DOI 10.1515/crelle-2012-0090

Journal für die reine und angewandte Mathematik

L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II

Par *Joseph Ayoub* à Zürich

Résumé. Ceci est le second volet d'une série de deux articles visant à construire et étudier des groupes de Galois motiviques dans le cadre des motifs triangulés. Ces groupes de Galois motiviques ont été construits dans le premier volet et leurs algèbres de fonctions régulières ont été décrites explicitement en termes de formes différentielles ou de cycles algébriques. Dans le présent article, nous avons regroupé des compléments importants au premier volet. Dans une première partie, nous décrivons le lien entre le groupe de Galois motivique et le groupe de Galois usuel d'un sous-corps de $\mathbb{C}$. Dans une deuxième partie, nous développons les bases d'une théorie de la ramification pour les groupes de Galois motiviques en construisant des groupes de décomposition et d'inertie motiviques associés à une place géométrique. On introduit également la notion de groupe de Galois motivique relatif pour une extension K/k qui mesure la différence entre les groupes de Galois motiviques de k et K. Ce dernier s'avère plus accessible que son analogue absolu. En effet, on montrera que c'est un quotient du complété pro-algébrique du pro-groupe fondamental topologique de la pro-variété $\hom_k(K, \mathbb{C})$, du moins lorsque l'extension K/k est de type fini.

This is the second article of a series of two, aiming at constructing and studying motivic Galois groups in the context of triangulated motives. These motivic Galois groups were constructed in the first article and their algebras of regular functions were described concretely in terms of differential forms or algebraic cycles. In the present article, we gather important complements to the first one. In the first part of this article, we describe the link between the motivic Galois group and the usual Galois group of a subfield of $\mathbb{C}$. In the second part, we develop the basis of a theory of ramification for the motivic Galois groups by constructing motivic versions of the decomposition and inertia groups associated to a geometric valuation. We also introduce the relative motivic Galois group of an extension K/k which measures the difference between the motivic Galois groups of k and K. The latter is more accessible than its absolute counterpart. In effect, we show that it is a quotient of the pro-algebraic completion of the topological fundamental pro-group of a the pro-variety $\hom_k(K, \mathbb{C})$, at least when the extension K/k is of finite type.

L'auteur a bénéficié du soutien partiel du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet no. 2000201-124737/1.

Table des matières

Introduction

C'est le second volet d'une série de deux articles visant à construire et étudier des groupes de Galois motiviques dans le cadre des motifs triangulés. Ces groupes de Galois motiviques ont été construits dans le premier volet [5] et leurs algèbres de fonctions régulières ont été décrites explicitement en termes de formes différentielles ou de cycles algébriques. Le présent volet contient des compléments à [5] et il est destiné à être lu à la suite de [5]. En particulier, une connaissance de la section 1 et de la section 2.1 de [5] sera supposée et aucun résultat de [5] ne sera rappelé. Les notations sont les mêmes que ceux de [5].

Donnons un aperçu de l'article.

Lien avec le groupe de Galois ordinaire. Dans la section 1.2 nous étudions le lien entre le groupe de Galois motivique d'un corps k muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ et le groupe de Galois ordinaire de l'extension $\bar{k}/k$, où $\bar{k} \subset \mathbb{C}$ est la clôture algébrique de k dans $\mathbb{C}$. Nous construisons en effet un morphisme de pro-schémas en groupe

$$\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)_{\Lambda} \tag{1}$$

où $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)_{\Lambda}$ est le groupe de Galois de $\bar{k}/k$ vu comme un pro-schéma en groupe constant sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$. Ce morphisme est en fait obtenu à partir d'un morphisme, a priori plus précis, entre algèbres de Hopf dans $\mathbf{D}(\Lambda)$

$$\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda). \tag{2}$$

Nous montrerons dans la section 1.2.2 que si Λ est de torsion, le morphisme (2) est inversible. Il en est donc de même du morphisme (1). Pour Λ général, le morphisme (1) est surjectif et il est plausible que son noyau soit connexe. Autrement dit, nous espèrons que le groupe de Galois de $\bar{k}/k$ s'identifie au groupe des composantes connexes du groupe de Galois motivique de k. Malheureusement, nous ne savons pas comment progresser dans cette direction. Cependant, le lecteur trouvera une preuve du fait que le noyau de (1) s'identifie au groupe de Galois motivique de $\bar{k}$ (voir corollaire 2.31).

Décrivons à présent le lien avec les représentations ℓ-adiques. Pour fixer les idées, supposons que $\Lambda = \mathbb{Z}$ et soit ℓ un nombre premier. Nous avons des isomorphismes naturels

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z}/\ell^n) \simeq \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/\ell^n) \simeq \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}_{\ell}),$$

où $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}_{\ell})$ est l'anneau des fonctions continues du groupe de Galois de $\bar{k}/k$ à valeurs dans l'anneau des entiers ℓ-adiques muni de sa topologie usuelle. Nous en déduisons un morphisme canonique

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z}) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}_{\ell}). \tag{3}$$

De plus, $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}_{\ell})$ est une algèbre de Hopf dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{Z}_{\ell}$-modules normés et l'homomorphisme (3) est compatible avec les multiplications et co-multiplications. Il s'ensuit qu'un comodule sur $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$ détermine un comodule sur $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}_{\ell})$. Autrement dit, à une représentation de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$ on peut associer une représentation ℓ-adique du groupe de Galois de $\bar{k}/k$. On vérifie dans la section 1.2.3 que cette construction appliquée à la représentation canonique de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$ sur $\mathsf{Bti}^*(M)$, pour $M \in \mathbf{DA}(k, \mathbb{Z})$, redonne la représentation ℓ-adique usuelle sur $\mathsf{Bti}^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell}$.

Il ne fait aucun doute qu'une représentation de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$ détermine aussi une structure de Hodge mixte et que ceci permette de retrouver les structures de Hodge mixtes usuelles sur l'homologie et la cohomologie des variétés algébriques ; toutefois, nous n'avons pas tenté de vérifier les détails.

Groupes d'inertie et de décomposition motiviques. Soient K/k le corps de fonctions d'une k-courbe et υ une k-valuation, i.e., une valuation telle que k est contenu dans son anneau de valuation. Notons $\tilde{K}$ le corps résiduel de υ et fixons un plongement complexe $\tilde{\sigma} : \tilde{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Notons enfin $\hat{K}$ le complété de K pour la valuation υ. Par [3], nous disposons de la catégorie $\mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$ des motifs des variétés rigides sur $\hat{K}$. Le choix d'une uniformisante de K détermine une équivalence de catégories $\mathbf{QUDA}(\tilde{K}, \Lambda) \simeq \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$ où

$\mathbf{QUDA}(\tilde{K},\Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{K}},\Lambda)$ est la sous-catégorie pleine des motifs quasi-unipotents. Appelons $\hat{\Psi}_\pi : \mathbf{RigDA}(\hat{K},\Lambda) \to \mathbf{DA}(\tilde{K},\Lambda)$ la composition de

$$\mathbf{RigDA}(\hat{K},\Lambda) \simeq \mathbf{QUDA}(\tilde{K},\Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{K}},\Lambda) \xrightarrow{1^*} \mathbf{DA}(\tilde{K},\Lambda).$$

Le foncteur de réalisation de Betti pour les motifs rigides est obtenu en composant $\hat{\Psi}_\pi$ avec $\mathsf{Bti}^* : \mathbf{DA}(\tilde{K},\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$. Nous lui appliquons notre dualité de Tannaka faible pour obtenir une algèbre de Hopf $\mathcal{H}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{K},\tilde{\sigma},\Lambda)$. En fait, cette algèbre de Hopf est un produit tensoriel semi-direct de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(\tilde{K},\tilde{\sigma},\Lambda)$ avec une algèbre de Hopf qu'on peut complètement expliciter. Lorsque $\Lambda = \mathbb{Q}$, c'est $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1),\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[t]$, l'algèbre des fonctions sur le pro-schéma en groupe $\hat{\mathbb{Z}}(1) \times \mathbb{G}\mathrm{a}_{\mathbb{Q}}$.

Revenons maintenant au corps K et fixons un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ qui coïncide avec $\tilde{\sigma}$ sur k. Il existe (cf. proposition 2.20) un isomorphisme (non canonique) entre le foncteur $\mathsf{Bti}^* : \mathbf{DA}(K,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ et la composition de

$$\mathbf{DA}(K,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} \mathbf{RigDA}(\hat{K},\Lambda) \xrightarrow{\hat{\Psi}_\pi} \mathbf{DA}(\tilde{K},\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Bti}^*} \mathbf{D}(\Lambda).$$

On en déduit un morphisme de Λ-algèbres de Hopf $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda) \to \mathcal{H}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{K},\tilde{\sigma},\Lambda)$. Ce morphisme est surjectif. Plus précisément, lorsque que $k \simeq \tilde{K}$, nous montrons que $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$ est un produit tensoriel semi-direct de $\mathcal{H}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{K},\tilde{\sigma},\Lambda)$ et d'une autre algèbre de Hopf. Cette dernière est la réalisation de Betti d'une algèbre de Hopf dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$ que nous associons au foncteur « motif proche » $\Psi_\pi : \mathbf{DA}(K,\Lambda) \to \mathbf{DA}(\tilde{K},\Lambda)$ égal au foncteur composé $\hat{\Psi}_\pi \circ \mathsf{Rig}^*$.

Notons

$$\mathbf{G}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{K},\tilde{\sigma},\Lambda) = \mathrm{Spec}(\mathrm{H}_0(\mathcal{H}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{K},\tilde{\sigma},\Lambda)))$$

et $\mathbf{D}_{\mathrm{mot}}(\upsilon)$ l'image de $\mathbf{G}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{K},\tilde{\sigma},\Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$, un monomorphisme de pro-schémas en groupe. C'est le *groupe de décomposition motivique* de υ. Il s'insère dans une suite exacte courte scindée

$$\{1\} \to \mathbf{I}_{\mathrm{mot}}(\upsilon) \to \mathbf{D}_{\mathrm{mot}}(\upsilon) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(\tilde{K},\tilde{\sigma},\Lambda) \to \{1\}$$

où $\mathbf{I}_{\mathrm{mot}}(\upsilon)$ est appelé le *groupe d'inertie motivique* de υ. Lorsque Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on a $\mathbf{I}_{\mathrm{mot}}(\upsilon) \simeq \hat{\mathbb{Z}}(1) \times \mathbb{G}\mathrm{a}_{\Lambda}$. Bien entendu, une extension de ces constructions au cas où υ est d'inégale caractéristique serait la bienvenue.

Groupes de Galois motiviques relatifs et groupes fondamentaux motiviques. Soit K/k une extension de type fini et fixons un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Le groupe de Galois motivique de K relativement à k est le noyau de l'homomorphisme

$$\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda),$$

et il sera noté $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)$. Il est possible aussi de faire cette construction au niveau des algèbres de Hopf motiviques. Nous obtenons alors une Λ-algèbre de Hopf graduée $\mathcal{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{gr}}$ telle que $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda) = \mathrm{Spec}(\mathrm{H}_0(\mathcal{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{gr}}))$. On pourrait penser que cette construction est plus précise, mais il n'en est rien. En effet, nous prouverons dans la section 2.4.2 que $\mathcal{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{gr}}$ est concentrée en degré zéro. Autrement dit, cette algèbre de Hopf est déterminée par le pro-schéma en groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$. Comme application, on voit qu'il suffit de montrer la conjecture A de la section 2.6 de [5] pour $k = \mathbb{Q}$.

Une construction très liée est celle des groupes fondamentaux motiviques. Étant donnés un k-schéma de type fini X et un k-point $x \in X(k)$, on peut définir une algèbre de Hopf

$\mathscr{F}_{\mathrm{mot}}(X, x, \Lambda) \in \mathbf{DA}(k, \Lambda)$. C'est l'*algèbre de Hopf fondamentale motivique* du k-schéma pointé (X, x). Elle est intimement liée au groupe fondamental de l'espace analytique pointé $(X(\mathbb{C}), x)$: on a un morphisme d'algèbres de Hopf

$$\mathsf{Bti}^*(\mathscr{F}_{\mathrm{mot}}(X, x, \Lambda)) \to \mathscr{C}^0_f(\pi_1(X(\mathbb{C}), x), \Lambda)$$

où $\mathscr{C}^0_f(\pi_1(X(\mathbb{C}), x), \Lambda)$ est l'algèbre des fonctions du complété pro-algébrique du groupe fondamental de $(X(\mathbb{C}), x)$.

Lorsque $(X, x) = (C, c)$ est une courbe affine et lisse, l'algèbre $\mathsf{Bti}^*(\mathscr{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda))$ est concentrée en degré zéro, ce résultat étant à la base du résultat correspondant pour les algèbres de Hopf motiviques relatives dont il s'agissait ci-dessus. Notons

$$\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda) = \mathrm{Spec}(\mathsf{Bti}^*(\mathscr{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda))).$$

Nous montrons également que l'image du morphisme $\pi_1(C(\mathbb{C}), c) \to \Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ est Zariski dense, du moins si C est un revêtement étale d'un ouvert de la droite affine. Notons que cette dernière condition est probablement superflue mais nous n'avons pas réussi à l'éliminer. Ceci entraîne un résultat similaire pour les groupes de Galois motiviques relatifs (cf. théorème 2.57). C'est là le résultat le plus important de cet article.

1. Groupes de Galois classiques et groupes de Galois motiviques

On fixe un anneau de coefficients Λ et un corps k de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Dans cette section nous faisons le lien entre le groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ et le groupe de Galois ordinaire $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ de l'extension $\bar{k}/k$ où $\bar{k} \subset \mathbb{C}$ est la clôture algébrique de k dans $\mathbb{C}$. Ce lien est obtenu en calculant l'algèbre de Hopf motivique $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$, et sa variante effective $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$, lorsque Λ est un anneau de torsion. On trouve en effet que ces algèbres s'identifient canoniquement à l'algèbre des fonctions continues $\mathscr{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda)$. Pour établir cette identification nous devons d'abord montrer que les bialgèbres $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ et $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ peuvent être définies en utilisant les motifs avec transferts.

1.1. Construction des algèbres de Hopf motiviques via les motifs avec transferts. Nous reprenons ici les constructions de la section 2.1 de [5] pour les catégories des motifs de Voevodsky, i.e., avec transferts. Ces constructions fournissent, à isomorphisme près, les mêmes bialgèbres $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$. Nous obtenons ainsi une construction alternative des bialgèbres motiviques. Ceci sera utile dans la section 1.2. Dans la suite, τ désignera un symbole dans $\{\mathrm{Nis}, \text{ét}\}$. Pour des rappels succincts sur la construction des catégories des motifs avec transferts et pour les notations employées ci-dessous, nous renvoyons le lecteur à la section 2.3.2 de [5]. Notre première tâche sera de construire un foncteur de réalisation de Betti sur les catégories des motifs de Voevodsky en adaptant la méthode de [4].

1.1.1. La construction de Voevodsky pour les variétés complexes. On note CpVar la catégorie des variétés complexes (qu'on identifie à la catégorie $\mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}$ de la section 2.1.2 de [5]). C'est un site pour la topologie de Grothendieck engendrée par les recouvrements ouverts des variétés complexes et abrégée dans la suite par « usu ».

La catégorie des espaces analytiques complexes (ayant un nombre fini de composantes connexes) vérifie toutes les conditions requises pour parler de morphismes multivalués et de correspondances abstraites (voir l'appendice A). Par abus de langage, une correspondance abstraite entre deux variétés complexes X et Y sera dorénavant appelée une *correspondance finie*. Le groupe abélien qu'elles forment sera noté $\mathbf{AnCor}(X, Y)$. Lorsque X et Y n'ont pas nécessairement un nombre fini de composantes connexes, on pose

$$\mathbf{AnCor}(X, Y) = \prod_{i \in \pi_0(X)} \bigoplus_{j \in \pi_0(Y)} \mathbf{AnCor}(X_i, Y_j).$$

On note **AnCor** la catégorie ayant pour objets les variétés complexes et pour morphismes les correspondances finies. La catégorie **AnCor** est additive, monoïdale, symétrique et unitaire. La somme directe et le produit tensoriel sont respectivement donnés par le coproduit et le produit des variétés complexes. Un *préfaisceau avec transferts* (de Λ-modules) sur CpVar est un foncteur contravariant et additif de **AnCor** dans la catégorie des Λ-modules. Si X est une variété complexe, on note $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ le préfaisceau avec transferts représenté par X, i.e., tel que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)(-) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{AnCor}(-, X)$. Les préfaisceaux avec transferts sur CpVar forment une catégorie qu'on note $\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)$. C'est une catégorie abélienne de Grothendieck. Elle est monoïdale, symétrique et unitaire, et son produit tensoriel est caractérisé (à isomorphisme près) par la propriété de commuter aux colimites et par l'égalité $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X) \otimes \Lambda_{\mathrm{tr}}(Y) = \Lambda_{\mathrm{tr}}(X \times Y)$ vraie pour toutes les variétés complexes X et Y.

Un *faisceaux avec transferts* sur CpVar est un préfaisceau avec transferts dont la restriction à CpVar est un usu-faisceau. On note $\mathbf{Str}(\mathsf{CpVar}, \Lambda) \subset \mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine des faisceaux avec transferts. Comme dans le cas algébrique, on peut montrer que $\mathbf{Str}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)$ est une catégorie abélienne de Grothendieck et que l'inclusion évidente admet un adjoint à gauche $\mathrm{a}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{usu}} : \mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda) \to \mathbf{Str}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)$. De plus, modulo les transferts, le foncteur $\mathrm{a}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{usu}}$ est donné par le foncteur de faisceautisation pour la topologie usuelle. On ne donnera pas ici une preuve de ces assertions. On se contente d'indiquer que la méthode suivie dans [3, §2.2] pour prouver le résultat correspondant en géométrie rigide s'adapte sans difficulté au cas analytique complexe.

La preuve de [3, théorème 2.5.7] se transporte littéralement au cas des variétés complexes. On peut donc munir la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$ d'une structure de modèles projective usu-locale. Les équivalences faibles de cette structure sont appelées les équivalences usu-locales. Ce sont les morphismes de complexes de préfaisceaux avec transferts qui induisent des isomorphismes sur les faisceaux associés au préfaisceaux d'homologie. L'analogue analytique complexe de [3, proposition 2.5.9] est également vrai. Autrement dit, le foncteur $\mathrm{a}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{usu}}$ induit une équivalence de catégories

$$\mathsf{La}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{usu}} : \mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}(\mathbf{Str}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)),$$

le membre de gauche étant la catégorie homotopique de la structure usu-locale. Une localisation à la Bousfield de la structure usu-locale fournit la structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale pour laquelle la flèche $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{D}^1_X)[n] \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)[n]$ est une équivalence faible pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute variété complexe X. On pose

$$\mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1-\mathrm{usu}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))),$$

la catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale.

On dispose d'un couple de foncteurs adjoints $(\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}})$ d'ajout et d'oubli de transferts

$$\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda) \underset{\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda).$$

Le foncteur o_{tr} associe à un préfaisceau avec transferts sa restriction à CpVar. Le foncteur a_{tr} est monoïdal, commute aux colimites et envoie $X \otimes \Lambda$ sur $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ pour toute variété complexe X. On a le résultat suivant.

Lemme 1.1. *On a des adjonctions de Quillen*

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)) \underset{\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$$

pour les structures projectives usu*-locales ainsi que les structures projectives* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locales.*

Démonstration. Remarquons que o_{tr} est un foncteur de Quillen à droite relativement aux structures projectives. En effet, les fibrations projectives de complexes de préfaisceaux, avec ou sans transferts, sont les morphismes surjectifs. Or, o_{tr} préserve les morphismes surjectifs. Pour montrer que l'adjonction de Quillen $(\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}})$ passe à la localisation suivant les équivalences usu-locales, il suffira de montrer que o_{tr} préserve les objets usu-fibrants.

Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur CpVar. On suppose que K est usu-fibrant et on cherche à prouver que $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(K)$ est usu-fibrant. Soient V une variété complexe et $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de V. On peut montrer qu'on a une équivalence usu-locale de complexes de préfaisceaux avec transferts

$$\Big[\cdots \to \bigoplus_{j_1,\ldots,j_n\in J} \Lambda_{\mathrm{tr}}(V_{j_1}\cap\cdots\cap V_{j_n}) \to \cdots \to \bigoplus_{j\in J}\Lambda_{\mathrm{tr}}(V_j)\Big] \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(V)[0].$$

Le lecteur pourra adapter la preuve de [3, proposition 2.5.1]. Comme K est usu-fibrant, on déduit aussitôt un quasi-isomorphisme de complexes de Λ-modules

$$K_\bullet(V) \to \mathrm{Tot}\Big[\bigoplus_{j\in J} K_\bullet(V_j) \to \cdots \to \bigoplus_{j_1,\ldots,j_n\in J} K_\bullet(V_{j_1}\cap\cdots\cap V_{j_n}) \to \cdots\Big],$$

où $\mathrm{Tot}(-)$ est le foncteur qui associe à un bicomplexe, son complexe total. Or, l'hyper-cohomologie d'un complexe de préfaisceaux sur la variété topologique V se calcule à l'aide de sa cohomologie de Čech, i.e., la colimite suivant les recouvrements ouverts de V de la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe ci-dessus. On déduit alors un quasi-isomorphisme : $K_\bullet(V) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}\Gamma(V, K_{|\mathrm{Ouv}(V)})$. La restriction de K (mais aussi de $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(K)$) au petit site $\mathrm{Ouv}(V)$ est donc un objet usu-fibrant de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Ouv}(V), \Lambda))$. Par le lemme 2.2 de [5], ceci entraîne que $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(K)$ est usu-fibrant. Enfin, le passage à la $\mathbb{D}^1$-localisation ne présente aucune difficulté. □

On déduit du lemme 1.1 une adjonction

$$\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda) \underset{\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda). \tag{4}$$

Le foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ est triangulé et monoïdal. Vu le résultat ci-dessous, il n'est pas nécessaire de dériver le foncteur o_{tr}.

Lemme 1.2. *Le foncteur* $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$ *préserve les équivalences* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locales.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 2.111 de [5]. Elle est omise. □

Proposition 1.3. *L'adjonction*

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)) \underset{\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$$

est une équivalence de Quillen pour les structures projectives $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locales. En particulier, les foncteurs* $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ *et* $\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}$ *dans* (4) *sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.*

Démonstration. Par le lemme 1.1, on sait que $(\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}})$ est une adjonction de Quillen. Il reste à voir que $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ est une équivalence de catégories. On divise la preuve en deux étapes.

Étape A. On montre ici que la catégorie triangulée $\mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ coïncide avec sa plus petite sous-catégorie triangulée stable par petites sommes et contenant $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{pt})$.

On peut résoudre tout complexe de préfaisceaux avec transferts par des complexes qui sont en chaque degré une somme directe de préfaisceaux avec transferts représentables. Ceci entraîne que $\mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ coïncide avec sa plus petite sous-catégorie triangulée stable par petites sommes et contenant les $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ pour toutes les variétés complexes X. Ainsi, il suffit de montrer que les $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ sont contenus dans la plus petite sous-catégorie triangulée $\mathcal{T}$ stable par petites sommes et contenant $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{pt})$. Pour cela, on peut utiliser [4, proposition 1.5] et le fait que le foncteur triangulé $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda) \to \mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ commute aux sommes infinies.

Étape B. Pour terminer la preuve, il reste à voir que le foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ est pleinement fidèle. En effet, si c'est le cas, $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)) \subset \mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ sera une sous-catégorie triangulée stable par petites sommes et contenant $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{pt})$. L'étape A entraîne alors que $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ est essentiellement surjectif.

Par [4, théorème 1.8], le foncteur $(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$, qui à un complexe de Λ-modules K associe le préfaisceau constant $K_{\mathrm{cst}} = \mathrm{pt} \otimes K$, est une équivalence de catégories. Il suffit donc de montrer que

$$\hom_{\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)}(K_{\mathrm{cst}}, L_{\mathrm{cst}}) \to \hom_{\mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)}(\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(K_{\mathrm{cst}}), \mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}}))$$

est inversible pour tous complexes de Λ-modules K et L. Par adjonction, on a un isomorphisme

$$\hom_{\mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)}(\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(K_{\mathrm{cst}}), \mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}})) \simeq \hom_{\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)}(K_{\mathrm{cst}}, \mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}})).$$

On est donc ramené à montrer que $L_{\mathrm{cst}} \to \mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}})$ est inversible. On peut supposer que le complexe de Λ-modules L est projectivement cofibrant. Dans ce cas, le complexe de préfaisceaux L_{cst} est aussi projectivement cofibrant et $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}}) \simeq \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}})$. Par le lemme 1.2, le foncteur o_{tr} préserve les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales. Il se dérive donc trivialement. On est donc ramené en fin de compte à prouver que $L_{\mathrm{cst}} \to \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}})$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Une inspection facile montre que $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}})$ coïncide avec le faisceau associé à L_{cst} sur les variétés complexes ayant un nombre fini de composantes connexes. (Ceci découle immédiatement du fait que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{pt})(X)$ est isomorphe à $\Lambda^{\pi_0(X)}$ si $\pi_0(X)$ est fini.) La proposition est prouvée. □

Corollaire 1.4. *Le foncteur* $(-)^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}}$ *qui à un complexe de* Λ*-modules* K *associe le préfaisceau avec transferts* $L^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}} = \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(L_{\mathrm{cst}})$ *induit une équivalence de catégories*

$$(-)^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda).$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la proposition 1.3 et de [4, théorème 1.8]. □

On choisit un remplacement projectivement cofibrant $T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}$ du préfaisceau avec transferts quotient $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}})/\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}} - o)$. (Par exemple, $T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}} = \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(T_{\mathrm{pt}})$ avec T_{pt} comme dans la section 2.1.2 de [5].) On note $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$ la catégorie des $T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}$-spectres symétriques de complexes de préfaisceaux avec transferts. On munit cette catégorie de la structure de modèles projective stable déduite de la structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$. On pose

$$\mathbf{AnDM}(\Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1-\mathrm{usu}-\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))),$$

la catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. Elle est triangulée et monoïdale.

Rappelons qu'on dispose d'un isomorphisme $T_k \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$ dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$. On en déduit, par application du foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$, un isomorphisme $T^{\mathrm{tr}}_k \simeq \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{pt})[2]$. En particulier, $T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}$ est un objet inversible pour le produit tensoriel de $\mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$. Il s'ensuit de [2, proposition 4.3.35] que le foncteur $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^{0}_{T^{\mathrm{tr}}_k} : \mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda) \to \mathbf{AnDM}(\Lambda)$ est une équivalence de catégories de quasi-inverse $\mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0$.

Comme dans le cas effectif, on dispose d'une adjonction

$$\mathbf{AnDA}(\Lambda) \underset{\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{AnDM}(\Lambda).$$

Elle s'obtient en prenant $T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}} = \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(T_{\mathrm{pt}})$ et en appliquant [2, lemme 4.3.34] au foncteur de Quillen à gauche a_{tr}. Il découle immédiatement de la proposition 1.3 que le foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ ci-dessus est une équivalence de catégories triangulées monoïdales de quasi-inverse $\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}$. D'ailleurs, $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$ et $\mathbf{AnDM}(\Lambda)$ sont aussi équivalentes à $\mathbf{D}(\Lambda)$.

Notons finalement qu'il n'est pas nécessaire de dériver le foncteur o_{tr}, du moins si l'on travaille avec les spectres non symétriques. En effet, on a le résultat suivant.

Lemme 1.5. *Le foncteur*

$$\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Spt}_{T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))) \to \mathbf{Spt}_{T_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$$

préserve les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locales stables.*

Démonstration. Le passage du cas effectif au cas stable dans la preuve du lemme 2.112 de [5] s'étend littéralement au cas analytique complexe. □

1.1.2. La réalisation de Betti pour les motifs avec transferts. Fixons à présent un corps k de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Le foncteur d'analytification, qui à un k-schéma de type fini X associe l'espace analytique X^{an}

des points complexes de X, commute aux quotients suivant des groupes finis. Il induit donc un foncteur sur les catégories des correspondances abstraites, d'où un foncteur additif $An : \mathbf{Cor}(k) \to \mathbf{AnCor}$ qui étend le foncteur d'analytification $An : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{CpVar}$ (cf. propositions A.13 et A.15). La composition à gauche avec ce foncteur fournit un foncteur image directe

$$An_* : \mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda) \to \mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda).$$

Ce dernier admet un adjoint à gauche An^* caractérisé par sa propriété de commuter aux colimites et par l'égalité $An^* \Lambda_{\mathrm{tr}}(X) = \Lambda_{\mathrm{tr}}(X^{\mathrm{an}})$, vraie pour tout k-schéma lisse X. On a le résultat suivant.

Proposition 1.6. (a) *On a une adjonction de Quillen*

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)) \underset{An_*}{\overset{An^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$$

lorsqu'on munit la source de sa structure projective $(\mathbb{A}^1, \tau)$*-locale et le but de sa structure projective* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale.*

(b) *On a une adjonction de Quillen*

$$\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T^{\mathrm{tr}}_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))) \underset{An_*}{\overset{An^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$$

(où l'on prend $T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}} = An^*(T^{\mathrm{tr}}_k)$*) lorsqu'on munit la source de sa structure projective* $(\mathbb{A}^1, \tau)$*-locale stable et le but de sa structure projective* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale stable.*

Démonstration. La partie (b) découle de la partie (a) via [2, lemme 4.3.34]. On se concentre donc sur la première partie de la proposition. Le fait que (An^*, An_*) est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives est clair puisque An_* préserve les épimorphismes de préfaisceaux avec transferts. Pour vérifier que cette adjonction passe à la localisation par les équivalences locales, il suffit de montrer que An_* envoie un complexe de préfaisceaux avec transferts usu-local sur un complexe de préfaisceaux avec transferts τ-local. Étant donné que les foncteurs d'oubli de transferts préservent et détectent les objets usu-locaux et τ-locaux, on se ramène à montrer l'énoncé analogue pour les complexes de préfaisceaux sans transferts. Cet énoncé est vrai par [2, théorème 4.4.60]. Enfin, l'adjonction de Quillen (An^*, An_*) passe à la $\mathbb{A}^1$-localisation et la $\mathbb{D}^1$-localisation. En effet, An^* envoie la flèche $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^1_X) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ sur $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}} \times X^{\mathrm{an}}) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(X^{\mathrm{an}})$ qui est inversible dans $\mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$. □

On déduit de la proposition 1.6 deux foncteurs triangulés, monoïdaux, symétriques et unitaires :

$$An^{\mathrm{eff},\tau,*}_{k,\mathrm{tr}} : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k, \Lambda) \to \mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda) \quad \text{et} \quad \mathsf{An}^{\tau,*}_{k,\mathrm{tr}} : \mathbf{DM}^{\tau}(k, \Lambda) \to \mathbf{AnDM}(\Lambda).$$

Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie. De même, lorsque le corps k est compris, on omettra de le mentionner. On a des isomorphismes canoniques de foncteurs monoïdaux :

$$\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \circ \mathsf{An}^{\mathrm{eff},\tau,*} \simeq \mathsf{An}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{\mathrm{tr}} \circ \mathsf{La}_{\mathrm{tr}}, \quad \mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \circ \mathsf{An}^{\tau,*} \simeq \mathsf{An}^{\tau,*}_{\mathrm{tr}} \circ \mathsf{La}_{\mathrm{tr}},$$

$$\mathrm{Sus}^0_{T^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{pt}}} \circ \mathsf{An}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{\mathrm{tr}} \simeq \mathsf{An}^{\tau,*}_{\mathrm{tr}} \circ \mathrm{Sus}^0_{T^{\mathrm{tr}}_k}.$$

Définition 1.7. (a) La réalisation de Betti effective (avec transferts) est la composition de

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{k,\mathrm{tr}} : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{An}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{k,\mathrm{tr}}} \mathbf{AnDM}^{\mathrm{eff}}(\Lambda) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{pt},-)} \mathbf{D}(\Lambda).$$

C'est un foncteur triangulé et monoïdal. Son adjoint à droite sera noté $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{k,\mathrm{tr}*}$.

(b) La réalisation de Betti stable (avec transferts) est la composition de

$$\mathsf{Bti}^{\tau,*}_{k,\mathrm{tr}} : \mathbf{DM}^{\tau}(k,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{An}^{\tau,*}_{k,\mathrm{tr}}} \mathbf{AnDM}(\Lambda) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{pt},-)\circ \mathrm{R}\,\mathrm{Ev}_0} \mathbf{D}(\Lambda).$$

C'est un foncteur triangulé et monoïdal. Son adjoint à droite sera noté $\mathsf{Bti}^{\tau}_{k,\mathrm{tr},*}$.

Lorsque k est sous-entendu, on notera simplement $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{\mathrm{tr}}$, $\mathsf{Bti}^{\tau,*}_{\mathrm{tr}}$, $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{\mathrm{tr}*}$ et $\mathsf{Bti}^{\tau}_{\mathrm{tr}*}$ les foncteurs ci-dessus. Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie. On a des triangles commutatifs (à isomorphismes près)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \arrow[r, "\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}"] \arrow[d, "\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}"'] & \mathbf{D}(\Lambda) \\ \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \arrow[ur, bend right, "\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{\mathrm{tr}}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\tau}(k,\Lambda) \arrow[r, "\mathsf{Bti}^{\tau,*}"] \arrow[d, "\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}"'] & \mathbf{D}(\Lambda). \\ \mathbf{DM}^{\tau}(k,\Lambda) \arrow[ur, bend right, "\mathsf{Bti}^{\tau,*}_{\mathrm{tr}}"'] & \end{tikzcd} \tag{5}$$

1.1.3. Les bialgèbres associées aux réalisations de Betti des motifs avec transferts. Comme précédemment, k est un corps de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. On a un foncteur $(-)^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda)$ qui à un complexe de Λ-modules L associe $\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(L \otimes \mathrm{Spec}(k))$. Notons, qu'en tant que préfaisceau (sans transferts), il coïncide avec le faisceau associé à L_{cst} sur les variétés complexes ayant un nombre fini de composantes connexes. On pose aussi $(-)^{\Sigma,\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}} = \mathrm{Sus}^{0}_{T^{\mathrm{tr}}_{k}} \circ (-)^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\tau}(k,\Lambda)$.

Lemme 1.8. *Le foncteur $(-)^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}}$ (resp. $(-)^{\Sigma,\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}}$) est une section à $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{\mathrm{tr}}$ (resp. $\mathsf{Bti}^{\tau,*}_{\mathrm{tr}}$) dans la 2-catégorie des catégories triangulées et monoïdales.*

Démonstration. La preuve du lemme 2.5 de [5] s'étend littéralement aux catégories des motifs avec transferts. □

Lemme 1.9. *Les foncteurs*

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{\mathrm{tr}*} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \quad \textit{et} \quad \mathsf{Bti}^{\tau}_{\mathrm{tr}*} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\tau}(k,\Lambda)$$

commutent aux sommes infinies.

Démonstration. La preuve du lemme 2.6 de [5] s'étend littéralement aux catégories des motifs avec transferts. □

Proposition 1.10. (a) *Le foncteur de réalisation de Betti effective*

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$$

satisfait à l'hypothèse 1.20 *de* [5], *avec e le foncteur* $(-)^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda)$.

(b) *Le foncteur de réalisation de Betti stable*

$$\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\tau,*} : \mathbf{DM}^{\tau}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$$

satisfait à l'hypothèse 1.40 *de* [5]*, avec e le foncteur* $(-)_{\mathrm{cst}}^{\Sigma,\mathrm{tr}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\tau}(k,\Lambda)$.

Démonstration. Encore une fois, la preuve de la proposition 2.7 de [5] s'étend littéralement aux catégories des motifs avec transferts en utilisant les lemmes 1.8 et 1.9. □

Ainsi les théorèmes 1.21 et 1.45 de [5] fournissent respectivement une bialgèbre commutative et biunitaire $\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},\tau,*}\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}*}^{\mathrm{eff},\tau}\Lambda$ et une algèbre de Hopf commutative $\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\tau,*}\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}*}^{\tau}\Lambda$ dans $\mathbf{D}(\Lambda)$.

Définition 1.11. (a) On note $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$ la bialgèbre $\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},\tau,*}\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}*}^{\mathrm{eff},\tau}\Lambda$. C'est la *bialgèbre motivique effective* du corps k (version avec transferts) associée au plongement σ.

(b) On note $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$ l'algèbre de Hopf $\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\tau,*}\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}*}^{\tau}\Lambda$. C'est l'*algèbre de Hopf motivique* du corps k (version avec transferts) associée au plongement σ.

Comme dans la remarque 2.10 de [5], on peut montrer que les bialgèbres motiviques de la Définition 1.11 ne dépendent pas de la topologie $\tau \in \{\mathrm{Nis}, \text{ét}\}$. Le résultat ci-dessous découle de la proposition 1.28 de [5].

Proposition 1.12. *Soit M un objet de $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda)$ (resp. $\mathbf{DM}^{\tau}(k,\Lambda)$). Alors, la réalisation de Betti de M est naturellement un comodule sur $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$).*

Par la proposition 1.48 de [5], les triangles (5) induisent des morphismes de bialgèbres biunitaires

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}. \tag{6}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 1.13. *Les morphismes* (6) *sont des isomorphismes de bialgèbres.*

D'après Cisinski–Déglise (cf. corollaire B.14 de [5]), le foncteur

$$\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k,\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\text{ét}}(k,\Lambda)$$

est une équivalence de catégories. Ceci entraîne aussitôt que le morphisme

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$$

est inversible. Dans le cas effectif, le théorème B.1 de [5] entraîne également que

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$$

est inversible lorsque Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Dans le cas restant, i.e., si Λ n'est pas supposée une $\mathbb{Q}$-algèbre et que l'on s'intéresse au cas effectif, nous ignorons si le foncteur

$$\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}(k,\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}(k,\Lambda)$$

est une équivalence de catégories ou pas. Toutefois, il est possible de donner une preuve du théorème qui n'utilise pas une telle équivalence de catégories. Elle repose sur le résultat suivant.

Lemme 1.14. *Les foncteurs*

$$An^* : \mathbf{Shv}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \to \mathbf{Shv}(\mathsf{CpVar},\Lambda) \quad \textit{et} \quad An^*_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Str}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \to \mathbf{Str}(\mathsf{CpVar},\Lambda)$$

sont exacts. De plus, le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Str}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \arrow[r, "An^*_{\mathrm{tr}}"] \arrow[d, "o_{\mathrm{tr}}"'] & \mathbf{Str}(\mathsf{CpVar},\Lambda) \arrow[d, "o_{\mathrm{tr}}"] \\ \mathbf{Shv}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \arrow[r, "An^*_{\mathrm{tr}}"] & \mathbf{Shv}(\mathsf{CpVar},\Lambda) \end{tikzcd}$$

commute à un isomorphisme canonique près.

Démonstration. Soit (U,u) une variété complexe pointée. On dispose d'un foncteur fibre u^* sur $\mathbf{Str}(\mathsf{CpVar},\Lambda)$ à valeurs dans la catégorie des Λ-modules. Il associe à un faisceau F la colimite des $F(V)$ suivant les voisinages ouverts $V \subset U$ de u. Ce foncteur est exact. De plus, la famille des foncteurs fibres u^*, obtenue en faisant varier la variété pointée (U,u), est conservative. Ainsi, pour vérifier que An^* est exact, il suffira de vérifier que les foncteurs $u^* \circ An^*$ sont exacts. De même, pour vérifier que An^*_{tr} est exact, il suffira de vérifier que les foncteurs $u^* \circ o_{\mathrm{tr}} \circ An^*_{\mathrm{tr}}$ sont exacts.

Soit F un faisceau sans (resp. avec) transferts sur Sm/k. On a alors

$$u^* An^*(F) = \operatorname*{colim}_{u\in V\subset U}\Big(\operatorname*{colim}_{V\to X^{\mathrm{an}}\in(V\backslash(\mathsf{Sm}/k))} F(X)\Big) \tag{7}$$

$$\text{(resp.}\quad u^*\, o_{\mathrm{tr}}\, An^*_{\mathrm{tr}}(F) = \operatorname*{colim}_{u\in V\subset U}\Big(\operatorname*{colim}_{V\to X^{\mathrm{an}}\in(V\backslash\mathbf{Cor}(k))} F(X)\Big)). \tag{8}$$

Dans les colimites ci-dessus, on peut se restreindre aux k-schémas X affines.

Dans (7), la colimite totale est indexée par la catégorie $\mathcal{V}_U(u)\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k)$ dont les objets sont les couples $(V, V \to X^{\mathrm{an}})$ avec $V \subset U$ un voisinage ouvert de u et X un k-schéma affine et lisse. Un morphisme de $(V, V \to X^{\mathrm{an}})$ dans $(V', V' \to X'^{\mathrm{an}})$ correspond à une inclusion $V' \subset V$ et à un morphisme de k-schémas $X \to X'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] & X^{\mathrm{an}} \arrow[d] \\ V' \arrow[u] \arrow[r] & X'^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

commute. Notons $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{U,u}$, l'anneau local de la variété complexe U en u. Notons aussi $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k)$ la catégorie des morphismes de k-schémas de source $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ et de but affine et lisse. On dispose d'un foncteur

$$\mathcal{V}_U(u)\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k) \tag{9}$$

qui à un couple $(V, V \to X^{\mathrm{an}})$ associe le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \to X$ correspondant à la composition de

$$\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_U(V) \to \mathcal{A}.$$

Le foncteur (9) est surjectif sur les objets. En effet, puisque $\mathcal{A} = \mathrm{colim}_{u \in V \subset U}\, \mathcal{O}_U(V)$ et que $\mathcal{O}_X(X)$ est une k-algèbre de présentation finie, tout morphisme $\theta : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{A}$ se factorise par $\mathcal{O}_U(V)$ pour un certain voisinage ouvert V de u. Une telle factorisation détermine alors un morphisme de variétés analytiques $V \to X^{\mathrm{an}}$ et il est facile de voir que $(V, V \to X^{\mathrm{an}})$ est envoyé sur le morphisme correspondant à θ par le foncteur (9). Un argument similaire montre que ce même foncteur est surjectif sur les morphismes. Il en résulte aussitôt que la colimite de (7) se calcule de la manière suivante :

$$u^*An^*(F) \simeq \underset{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \to X \in (\mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k))}{\mathrm{colim}} F(X). \tag{10}$$

Par ailleurs, on sait que $\mathcal{A}$ est un anneau local, noethérien et régulier. Par [14, 15], $\mathcal{A}$ est une colimite filtrante de k-algèbres lisses. Il en découle que la catégorie $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k)$ est cofiltrante. Le foncteur u^*An^* est donc exact.

On peut répéter l'argument précédent dans le cas d'un faisceau avec transferts. La colimite totale dans (8) est indexée par la catégorie $\mathcal{V}_U(u)\backslash\mathbf{Cor}^{\mathrm{af}}(k)$ dont les objets sont les couples (V, α) tels que $\alpha \in \mathbf{AnCor}(V, X^{\mathrm{an}})$ avec X un k-schéma affine et lisse. On a également un foncteur

$$\mathcal{V}_U(u)\backslash\mathbf{Cor}^{\mathrm{af}}(k) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash\mathbf{Cor}^{\mathrm{af}}(k). \tag{11}$$

Il est défini de la manière suivante. Soit $(V, \alpha : V \to X)$ un objet de $\mathcal{V}_U(u)\backslash\mathbf{Cor}^{\mathrm{af}}(k)$. On peut représenter α comme une différence de deux morphismes multivalués de degrés purs (du moins lorsque V est connexe) : $\alpha = f_1 - f_2$ avec $f_i \in \mathrm{mult}_{d_i}(V, X^{\mathrm{an}})$ pour $i \in \{1, 2\}$. Étant donné que $\mathrm{S}^{d_i}(X^{\mathrm{an}}) = \mathrm{S}^{d_i}(X)^{\mathrm{an}}$, on voit que f_1 et f_2 induisent des morphismes multivalués $f_i' \in \mathrm{mult}_{d_i}(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}), X)$. De plus, $\alpha' = f_1' - f_2' \in \mathbf{Cor}_k(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}), X)$ est indépendant du choix des f_i. Le foncteur (11) envoie (V, α) sur α'. Comme avant, on montre qu'il est surjectif sur les objets et les morphismes. On obtient alors

$$u^* \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} An^*_{\mathrm{tr}}(F) = \underset{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \to X \in (\mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash\mathbf{Cor}^{\mathrm{af}}(k))}{\mathrm{colim}} F(X).$$

Par ailleurs, l'inclusion évidente

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash\mathbf{Cor}^{\mathrm{af}}(k)$$

est cofinal. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbf{Cor}_k(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}), X)$, on peut trouver une sous-k-algèbre de type finie et lisse $A \subset \mathcal{A}$ telle que $\alpha = (\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Spec}(A)) \circ \alpha'$ avec $\alpha' \in \mathbf{Cor}_k(\mathrm{Spec}(A), X)$. Ainsi, comme dans le cas d'un faisceau sans transferts, on obtient un isomorphisme canonique

$$u^* \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} An^*_{\mathrm{tr}}(F) \simeq \underset{\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \to X \in (\mathrm{Spec}(\mathcal{A})\backslash(\mathsf{Sm}^{\mathrm{af}}/k))}{\mathrm{colim}} F(X). \tag{12}$$

Ceci démontre que $u^* \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} An^*_{\mathrm{tr}}$ est exact.

Il nous reste à expliquer le carré commutatif à isomorphisme près de l'énoncé. Pour cela, soit E un faisceau avec transferts sur Sm/k. On dispose d'un morphisme canonique $An^* \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(E) \to \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} An^*_{\mathrm{tr}}(E)$ et il s'agit de voir qu'il est inversible. Or, modulo les isomorphismes (10) et (12), le morphisme $u^*An^* \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(E) \to u^* \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} An^*_{\mathrm{tr}}(E)$ est la colimite des morphismes identités $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(E)(X) = E(X)$. Ceci termine la preuve du lemme. □

Corollaire 1.15. *Les foncteurs*

$$An^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar},\Lambda)),$$
$$An^*_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{CpVar},\Lambda))$$

envoient une équivalence $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$*-locale sur une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale.*

Démonstration. On traite uniquement la variante sans transferts. On montre d'abord que le foncteur An^* envoie une équivalence Nis-locale sur une équivalence usu-locale. Pour cela, soit f une équivalence Nis-locale de complexes de préfaisceaux sur Sm/k. Ceci revient à dire que $\mathrm{a}_{\mathrm{Nis}}(f)$ est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux Nisnevich. Par le lemme 1.14, le foncteur An^* est exact sur les faisceaux. Or, le foncteur An^* sur les faisceaux est en réalité la composition de $\mathrm{a}_{\mathrm{usu}}$ avec le foncteur An^* sur les préfaisceaux. On en déduit aussitôt que $\mathrm{a}_{\mathrm{usu}}An^*(\mathrm{a}_{\mathrm{Nis}}(f)) \simeq \mathrm{a}_{\mathrm{usu}}An^*(f)$ est un quasi-isomorphisme. Autrement dit, $An^*(f)$ est une équivalence usu-locale.

Le foncteur An^* est un foncteur de Quillen à gauche. Il préserve donc les équivalences $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locales qui sont aussi des cofibrations projectives. Or, la structure projective Nis-locale permet d'écrire une équivalence $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locale comme une composée $p \circ i$ avec i une cofibration projective qui est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locale et p une fibration qui est une équivalence Nis-locale. Ceci termine la preuve du corollaire. □

Proposition 1.16. *La transformation naturelle*

$$\mathsf{An}^{\mathrm{eff},*} \circ \mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \to \mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \circ \mathsf{An}^{\mathrm{eff},*}_{\mathrm{tr}}$$

est inversible.

Démonstration. Rappelons que $\mathsf{An}^{\mathrm{eff},*}$ et $\mathsf{An}^{\mathrm{eff},*}_{\mathrm{tr}}$ sont les foncteurs dérivés à gauche des foncteurs An^* et An^*_{tr} du corollaire 1.15. D'après le lemme 2.111 de [5] et le lemme 1.2 les foncteurs o_{tr} se dérivent trivialement. Par le corollaire 1.15, il est en de même des foncteurs An^* et An^*_{tr}. On est donc ramené à montrer que le morphisme canonique

$$An^*\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,F \to \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,An^*_{\mathrm{tr}}F$$

est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale pour tout préfaisceau avec transferts F. En fait, c'est même une équivalence usu-locale. En effet, on a $\mathrm{a}_{\mathrm{usu}}(An^*\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,F) \simeq An^*\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(F)$ où, dans le membre de droite, An^* est le foncteur image inverse sur les faisceaux. De même, $\mathrm{a}_{\mathrm{usu}}(\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,An^*_{\mathrm{tr}}F) \simeq \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,An^*_{\mathrm{tr}}(\mathrm{a}_{\mathrm{Nis}}\,F)$ où, dans le membre de droite, An^* est le foncteur image inverse sur les faisceaux. Or, sur les faisceaux, la transformation naturelle $An^*\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \to \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,An^*$ est inversible par le lemme 1.14. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Démonstration du théorème 1.13. On supposera pour la preuve que $\tau = \mathrm{Nis}$. Rappelons qu'il restait à traiter le cas effectif. Dans ce cas, le morphisme qui nous préoccupe est la composition de

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_* \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}_{\mathrm{tr}}\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{tr},*} \xrightarrow{\delta} \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}_{\mathrm{tr}}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{tr},*}.$$

Il suffira donc de montrer que la transformation naturelle

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}_{\mathrm{tr}}\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \xrightarrow{\delta} \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}_{\mathrm{tr}} \tag{13}$$

est inversible. Tous les foncteurs qui figurent dans (13) commutent aux sommes infinies et l'image de $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ contient une famille de générateurs compacts de $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)$. On se ramène donc à montrer que la transformation naturelle

$$\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \xrightarrow{\delta} \mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$$

est inversible. Or, la transformation naturelle $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \to \mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ admet une section induite par l'unité de l'adjonction $(\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}, \mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}})$. Il suffit alors de montrer que la transformation naturelle

$$\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \xrightarrow{\eta} \mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$$

est inversible. Rappelons que $\mathsf{Bti}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},*} \circ \mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}$. La transformation naturelle ci-dessus s'identifie alors à

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*} \xrightarrow{\eta} \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$$

et, bien entendu, on peut remplacer les foncteurs $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}$ ci-dessus par $\mathsf{An}^{\mathrm{eff},*}$. Le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{An}^{\mathrm{eff},*} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathsf{An}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \arrow[d] \\
\mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\mathsf{An}^{\mathrm{eff},*} \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathsf{An}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}
\end{tikzcd}$$

et la proposition 1.16 permettent maintenant de conclure. □

1.2. Comodules sur l'algèbre de Hopf motivique et représentations galoisiennes. Comme avant, k désignera un corps de caractéristique nulle muni d'un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Dans cette section, on décrit les bialgèbres $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ lorsque Λ est de caractéristique positive. On a dans ce cas des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda) \simeq \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \simeq \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\Lambda). \tag{14}$$

Ci-dessus, $\bar{k} \subset \mathbb{C}$ est la clôture algébrique de k dans $\mathbb{C}$ (vu comme k-algèbre via le plongement σ), $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est le groupe de Galois de l'extension $\bar{k}/k$ muni de la topologie profinie et $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\Lambda)$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ dans Λ muni de la topologie discrète. On utilisera ensuite les isomorphismes (14) pour faire le lien entre les comodules sur les bialgèbres motiviques et les représentations ℓ-adiques. On commence par des considérations générales, valables pour tout Λ.

1.2.1. L'algèbre de Hopf $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\Lambda)$ et le lien avec les bialgèbres motiviques. Notons Et/k la catégorie des k-schémas étales (i.e., des k-schémas lisses de dimension nulle) que l'on munit de la topologie $\tau \in \{\mathrm{Nis}, \mathrm{ét}\}$. Notons que lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, un τ-faisceau sur Et/k est simplement un préfaisceau additif, i.e., qui transforme un coproduit fini en un produit fini. On dispose d'une structure de modèles projective τ-locale sur la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Et}/k,\Lambda))$ pour laquelle les fibrations sont les épimorphismes et les équivalences faibles sont les morphismes de complexes induisants des isomorphismes sur les τ-faisceaux associés aux préfaisceaux d'homologie. La catégorie homotopique de la structure τ-locale sera notée $\mathbf{D}^{\tau}(k,\Lambda)$. Elle est équivalente à la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\tau}(\mathsf{Et}/k,\Lambda))$ de la catégorie abélienne $\mathbf{Shv}_{\tau}(\mathsf{Et}/k,\Lambda)$ des τ-faisceaux sur Et/k.

Le plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ induit un foncteur fibre σ^* qui à un préfaisceau F sur Et/k associe
$$\sigma^*(F) = \operatorname*{colim}_{k \hookrightarrow l \subset \mathbb{C}} F(\mathrm{Spec}(l)),$$
où l parcourt les extensions finies de k contenues dans $\mathbb{C}$. Le foncteur σ^* est exact et il admet un adjoint à droite σ_* que l'on décrit dans le lemme ci-dessous.

Lemme 1.17. *Soit M un Λ-module. Alors $\sigma_*(M)$ est un faisceau étale et on a un isomorphisme fonctoriel*
$$\sigma_*(M)(\mathrm{Spec}(l)) \simeq M^{\hom_k(l,\mathbb{C})}$$
pour toute k-algèbre étale l.

Démonstration. En effet, on a les isomorphismes
$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{PSh}(\mathsf{Et}/k,\Lambda)}(\mathrm{Spec}(l)\otimes\Lambda, \sigma_*(M)) &\simeq \hom_{\mathrm{Mod}(\Lambda)}(\sigma^*(\mathrm{Spec}(l)\otimes\Lambda), M)\\ &\simeq \hom_{\mathrm{Mod}(\Lambda)}(\hom_k(l,\mathbb{C})\otimes\Lambda, M)\\ &\simeq M^{\hom_k(l,\mathbb{C})}.\end{aligned}$$
□

Le foncteur σ^* envoie une équivalence τ-locale sur un quasi-isomorphisme. Il découle du lemme 1.17 que σ_* envoie un quasi-isomorphisme sur un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. Les foncteurs σ^* et σ_* se dérivent donc trivialement pour fournir une adjonction $(\sigma^*, \sigma_*) : \mathbf{D}^{\tau}(k,\Lambda) \rightleftarrows \mathbf{D}(\Lambda)$.

Étant donné un complexe de Λ-modules K, on note K_{cst} le préfaisceau constant sur Et/k de valeur K. Le foncteur $(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{D}^{\tau}(k,\Lambda)$ est clairement une section monoïdale à σ^*. De plus, le lecteur vérifiera facilement que σ^* satisfait à l'hypothèse 1.20 (b) de [5], avec $e = (-)_{\mathrm{cst}}$. On en déduit une bialgèbre biunitaire $\sigma^*\sigma_*(\Lambda) \in \mathbf{D}(\Lambda)$, qu'on peut voir comme une bialgèbre de $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ puisque le complexe $\sigma^*\sigma_*(\Lambda)$ est concentré en degré zéro. C'est d'ailleurs aussi la bialgèbre associée au foncteur $\sigma^* : \mathbf{Shv}_{\tau}(\mathsf{Et}/k,\Lambda) \to \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Nous allons décrire explicitement cette bialgèbre. Pour cela, on aura besoin de la remarque suivante.

Remarque 1.18. Étant donné un groupe fini G, le Λ-module $\hom(G,\Lambda) = \Lambda^G$ est naturellement une algèbre de Hopf commutative (dans $\mathrm{Mod}(\Lambda)$). La multiplication est donnée, composante par composante, par la multiplication de Λ. La comultiplication est donnée par la composition de
$$\hom(G,\Lambda) \xrightarrow{\hom(m,\Lambda)} \hom(G\times G,\Lambda) \simeq \hom(G,\Lambda)\otimes_{\Lambda}\hom(G,\Lambda).$$
Enfin, l'antipode est donnée par $\hom(\mathrm{inv},\Lambda)$, où $\mathrm{inv} : G \to G$ envoie un élément de G sur son inverse. On dira que $\hom(G,\Lambda)$ est l'algèbre de Hopf du groupe fini G.

Proposition 1.19. *On a un isomorphisme canonique de bialgèbres biunitaires*
$$\sigma^*\sigma_*(\Lambda) \simeq \operatorname*{colim}_{k\hookrightarrow l\subset\mathbb{C},\ Galois} \Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)}, \tag{15}$$
le membre de droite étant la colimite filtrante suivant les extensions finies galoisiennes l/k contenues dans $\mathbb{C}$ des algèbres de Hopf des groupes de Galois de l/k. En particulier, $\sigma^*\sigma_*(\Lambda)$ est une algèbre de Hopf.

Démonstration. Par le lemme 1.17, on a un isomorphisme

$$\sigma^*\sigma_*(\Lambda) \simeq \operatorname*{colim}_{k\hookrightarrow l\subset\mathbb{C}} \Lambda^{\hom_k(l,\mathbb{C})}.$$

Dans cette colimite, on peut se restreindre aux extensions galoisiennes l/k contenues dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, $\hom_k(l,\mathbb{C})$ est un $\mathrm{Gal}(l/k)$-ensemble simplement transitif et l'inclusion $l \subset \mathbb{C}$ induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(l/k) \simeq \hom_k(l,\mathbb{C})$. On obtient ainsi l'isomorphisme (15). C'est un isomorphisme de Λ-algèbres et il reste à vérifier qu'il est compatible aux comultiplications.

Soient F un préfaisceau de Λ-modules sur Et/k et l/k une extension finie galoisienne contenue dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que la composition de

$$F(\mathrm{Spec}(l)) \xrightarrow{\eta} \sigma_*\sigma^*(F)(\mathrm{Spec}(l)) \simeq \sigma^*(F)^{\hom_k(l,\mathbb{C})} \simeq \sigma^*(F)^{\hom_k(l,l)}$$

envoie $a \in F(\mathrm{Spec}(l))$ sur la famille $([\mathrm{Spec}(t)^*(a)])_{t\in\hom_k(l,l)}$, où $[\mathrm{Spec}(t)^*(a)]$ est la classe de $\mathrm{Spec}(t)^*(a) \in F(\mathrm{Spec}(l))$ dans $\sigma^*(F)$. En passant à la colimite suivant les extensions finies galoisiennes l contenues dans $\mathbb{C}$, on déduit que la composition de

$$\sigma^*(F) \xrightarrow{\eta} \sigma^*\sigma_*\sigma^*(F) \simeq \operatorname*{colim}_{k\hookrightarrow l\subset\mathbb{C},\,\mathrm{Galois}} \sigma^*(F)^{\hom_k(l,\mathbb{C})} \simeq \operatorname*{colim}_{k\hookrightarrow l\subset\mathbb{C},\,\mathrm{Galois}} \sigma^*(F)^{\mathrm{Gal}(l/k)}$$

envoie la classe $[a] \in \sigma^*(F)$ d'un élément $a \in F(\mathrm{Spec}(l))$ (pour l une extension galoisienne contenue dans $\mathbb{C}$) sur la classe de la famille $(\mathrm{Spec}(g)^*(a))_{g\in\mathrm{Gal}(l/k)}$. Modulo l'isomorphisme canonique $F(\mathrm{Spec}(l))^{\mathrm{Gal}(l/k)} \simeq \Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)} \otimes F(\mathrm{Spec}(l))$, la famille $(\mathrm{Spec}(g)^*(a))_{g\in\mathrm{Gal}(l/k)}$ est envoyée sur la famille $(e_g \otimes \mathrm{Spec}(g)^*(a))_{g\in\mathrm{Gal}(l/k)}$ où $e_g(h) = \delta_{g,h}$ est le symbole de Kronecker (qui vaut $1 \in \Lambda$ lorsque $g = h$ et $0 \in \Lambda$ sinon). On a donc montré que la composition de

$$\begin{aligned}\sigma^*(F) \xrightarrow{\eta} \sigma^*\sigma_*\sigma^*(F) &\simeq \sigma^*(\sigma_*\Lambda \otimes_\Lambda (\sigma^*(F))_{\mathrm{cst}}) \simeq \sigma^*\sigma_*(\Lambda) \otimes_\Lambda \sigma^*(F)\\ &\simeq \Big(\operatorname*{colim}_{k\hookrightarrow l\subset\mathbb{C},\,\mathrm{Galois}} \Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)}\Big) \otimes \sigma^*(F)\end{aligned}$$

envoie la classe $[a]$ de $a \in F(\mathrm{Spec}(l))$ sur la classe de la famille $(e_g \otimes \mathrm{Spec}(g)^*(a))_{g\in\mathrm{Gal}(l/k)}$. Ceci détermine la coaction de la bialgèbre $\sigma^*\sigma_*(\Lambda)$ sur $\sigma^*(F)$. En spécialisant au cas $F = \sigma_*(\Lambda)$, on obtient que modulo l'isomorphisme (15), la comultiplication de $\sigma^*\sigma_*(\Lambda)$ est la colimite des morphismes $\Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)} \to \Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)} \otimes \Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)}$ qui envoient $e_h = (\delta_{hg})_{g\in\mathrm{Gal}(l/k)}$ (pour $h \in \mathrm{Gal}(l/k)$) sur la famille $(e_g \otimes \mathrm{Spec}(g)^*(e_h))_{g\in\mathrm{Gal}(l/k)}$. Or, il est clair que

$$\mathrm{Spec}(g)^*(e_h) = e_h \circ g = e_{h\circ g^{-1}}.$$

Ceci coïncide avec la comultiplication de l'algèbre de Hopf du groupe fini $\mathrm{Gal}(l/k)$. □

Remarque 1.20. On retiendra de la preuve précédente le fait suivant. Soit F un préfaisceau sur Et/k. Alors, la coaction de l'algèbre de Hopf

$$\sigma^*\sigma_*(\Lambda) \simeq \operatorname*{colim}_{k\hookrightarrow l\subset\mathbb{C},\,\mathrm{Galois}} \Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)}$$

sur $\sigma^*(F)$ est la suivante. Soit $[a] \in \sigma^*(F)$ la classe de $a \in F(\mathrm{Spec}(l))$ avec $l \subset \mathbb{C}$ une extension finie galoisienne de k. Alors $[a]$ est envoyée sur la classe de

$$(e_g \otimes \mathrm{Spec}(g)^*(a))_{g\in\mathrm{Gal}(l/k)} \in \Lambda^{\mathrm{Gal}(l/k)} \otimes F(\mathrm{Spec}(l)).$$

Remarque 1.21. Le foncteur σ^* s'enrichit en un foncteur

$$\tilde{\sigma}^* : \mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k, \Lambda) \to \text{coMod}(\sigma^*\sigma_*(\Lambda)).$$

On peut montrer que $\tilde{\sigma}^*$ est une équivalence de catégories. Ce fait ne servira pas dans la suite.

Notons $\bar{k}$ la clôture algébrique de k dans $\mathbb{C}$ et $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois de l'extension $\bar{k}/k$ muni de sa topologie profinie. On déduit de (15) un isomorphisme canonique

$$\sigma^*\sigma_*(\Lambda) \simeq \underset{H \lhd \text{Gal}(\bar{k}/k),\,\text{ouvert}}{\text{colim}} \hom\Big(\frac{\text{Gal}(\bar{k}/k)}{H}, \Lambda\Big). \tag{16}$$

Le membre de droite étant la colimite filtrante, suivant les sous-groupes distingués ouverts $H \lhd \text{Gal}(\bar{k}/k)$, des algèbres de Hopf des groupes finis $\text{Gal}(\bar{k}/k)/H$. Or, la colimite dans (16) s'identifie naturellement à la Λ-algèbre $\mathcal{C}^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda)$ des fonctions continues de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ dans Λ muni de la topologie discrète. Modulo cette identification, la multiplication correspond à la multiplication des fonctions et la comultiplication est induite par la multiplication de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ et l'identification

$$\mathcal{C}^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \otimes_\Lambda \mathcal{C}^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \simeq \mathcal{C}^0(\text{Gal}(\bar{k}/k) \times \text{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda).$$

On peut réécrire la proposition 1.19, ainsi que la remarque 1.20, de la manière suivante.

Proposition 1.22. *Il existe un isomorphisme canonique d'algèbres de Hopf*

$$\sigma^*\sigma_*(\Lambda) \simeq \mathcal{C}^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda).$$

Si F est un préfaisceau de Λ-modules sur Et/k, la coation

$$\sigma^*(F) \to \mathcal{C}^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \otimes \sigma^*(F)$$

est la suivante. Soient $l \subset \mathbb{C}$ une extension galoisienne de k et $a \in F(\text{Spec}(l))$. La classe $[a] \in \sigma^*(F)$ est envoyée par la coaction sur $\sum_{g \in \text{Gal}(l/k)} \bar{e}_g \otimes [\text{Spec}(g)^*(a)]$, où $\bar{e}_g(h) = \delta_{g,[\text{Gal}(\bar{k}/k) \twoheadrightarrow \text{Gal}(l/k)](h)}$ est la fonction caractéristique de l'image inverse de g dans $\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

On considère à présent l'inclusion évidente $\iota_0 : \mathsf{Et}/k \hookrightarrow \mathsf{Sm}/k$. Le foncteur ι_0 commute aux limites finies. Il induit donc un morphisme de sites (pour la topologie τ). En particulier, on dispose d'une adjonction de Quillen

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Et}/k, \Lambda)) \underset{\iota_{0*}}{\overset{\iota_0^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))$$

pour les structures projectives τ-locales. La même propriété reste vraie si l'on munit la catégorie de droite de sa structure projective $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale. En fait, ι_0^* préserve les équivalences τ-locales. Il se dérive donc trivialement. On déduit alors un foncteur triangulé et monoïdal $\iota_0^* : \mathbf{D}^\tau(k, \Lambda) \to \mathbf{DA}^{\text{eff},\tau}(k, \Lambda)$. Son adjoint à droite est $\mathsf{R}\iota_{0*}$.

Lemme 1.23. *Il existe un triangle commutatif à un isomorphisme canonique près :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}^{\tau}(k,\Lambda) \arrow[r, "\iota_0^*"] \arrow[dr, bend right, "\sigma^*"'] & \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \arrow[d, "\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}"] \\ & \mathbf{D}(\Lambda). \end{tikzcd}$$

Démonstration. Notons $\iota_0 : \mathsf{Et}/\mathrm{pt} \hookrightarrow \mathsf{CpVar}$ l'inclusion de la sous-catégorie des variétés complexes de dimension nulle et ayant un nombre fini de composantes connexes. Notons $An : \mathsf{Et}/k \to \mathsf{Et}/\mathrm{pt}$ la restriction de $An : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{CpVar}$ de sorte qu'on a $\iota_0 \circ An = An \circ \iota_0$. La topologie usuelle sur CpVar induit une topologie sur Et/pt, où les recouvrements sont les surjections et on a une équivalence de catégories $\mathbf{Shv}_{\mathrm{usu}}(\mathsf{Et}/\mathrm{pt},\Lambda) \simeq \mathrm{Mod}(\Lambda)$. De plus, modulo cette équivalence, le foncteur $An^* : \mathbf{Shv}_{\tau}(\mathsf{Et}/k,\Lambda) \to \mathbf{Shv}_{\mathrm{usu}}(\mathsf{Et}/\mathrm{pt},\Lambda)$ coïncide avec le foncteur σ^*. On déduit alors un carré commutatif à un isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Shv}_{\tau}(\mathsf{Et}/k,\Lambda) \arrow[r, "\sigma^*"] \arrow[d, "\iota_0^*"'] & \mathrm{Mod}(\Lambda) \arrow[d, "(-)_{\mathrm{cst}}"] \\ \mathbf{Shv}_{\tau}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \arrow[r, "An^*"] & \mathbf{Shv}_{\mathrm{usu}}(\mathsf{CpVar},\Lambda). \end{tikzcd}$$

En passant aux catégories dérivées et en localisant suivant les équivalences $(\mathbb{A}^1,\tau)$-locales et $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locales, on obtient un isomorphisme canonique $\mathsf{An}^{\mathrm{eff},\tau,*}\circ\iota_0^* \simeq (-)_{\mathrm{cst}}\circ\sigma^*$. Le résultat recherché découle maintenant de la construction de la réalisation de Betti (cf. définition 2.4 (a) de [5]). □

Ainsi, la proposition 1.48 de [5] s'applique pour fournir un morphisme de bialgèbres biunitaires $\sigma^*\sigma_*(\Lambda) \to \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$. Ceci, combiné avec la proposition 1.22, fournit le résultat suivant.

Proposition 1.24. *Il existe un morphisme de bialgèbres biunitaires*

$$\varrho : \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\Lambda) \to \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$$

tel que pour tout préfaisceau F sur Et/k, le $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$-comodule counitaire $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}(\iota_0^*(F))$ est déduit, par corestriction suivant ϱ, du $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\Lambda)$-comodule counitaire $\sigma^*(F)$ (de la proposition 1.22*) modulo l'isomorphisme canonique* $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}(\iota_0^*(F)) \simeq \sigma^*(F)$.

1.2.2. Le cas où Λ est de caractéristique positive. On garde les notations de la section précédente. Le but de cette section est de prouver le résultat suivant.

Théorème 1.25. *Supposons que Λ est de torsion. Alors, les morphismes*

$$\varrho : \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\Lambda) \to \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \quad \textit{et} \quad \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$$

sont inversibles.

Démonstration. Notons $\varrho' : \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\Lambda) \to \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$ le morphisme obtenu en composant ϱ avec le premier morphisme de (6). Par le théorème 1.13, il suffit de montrer que ϱ' et $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{tr}}$ sont inversibles. Pour ce faire, on supposera que $\tau =$ ét. Les morphismes en question sont obtenus en appliquant la proposition 1.48 de [5] aux foncteurs

$$\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \circ \iota_0^* : \mathbf{D}^{\text{ét}}(k,\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{tr}}} : \mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\text{ét}}(k,\Lambda).$$

La proposition 1.26 (a) ci-dessous permet donc de conclure pour le morphisme ϱ'. De même, la partie (b) de la même proposition montre que $T_k^{\mathrm{tr}} \simeq \Lambda(1)[2]$ est inversible pour le produit tensoriel de $\mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda)$. Le foncteur $\mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{tr}}}$ est donc une équivalence par [2, proposition 4.3.35] et notre second morphisme est aussi inversible. □

La preuve du théorème 1.25 repose sur les parties (a) et (b) de l'énoncé ci-dessous.

Proposition 1.26. *Supposons que Λ est de torsion et notons $n \in \mathbb{N}$ le plus petit entier non nul tel que $n \cdot 1_\Lambda = 0$.*

(a) *Le foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \circ \iota_0^* : \mathbf{D}^{\text{ét}}(k,\Lambda) \to \mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda)$ est une équivalence de catégories. Son quasi-inverse est donné par $\mathsf{R}\iota_{0*} \circ \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}$.*

(b) *Pour $r \in \mathbb{N}$, le motif de Tate $\Lambda(r) \in \mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda)$ est isomorphe au faisceau $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mu_n^{\otimes r}$, où μ_n est le faisceaux des racines n-ièmes de l'unité sur Sm/k.*

(c) *Soit X est un k-schéma lisse et notons $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ sa projection structurale. Alors, $\mathsf{R}\iota_{0*} \circ \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$ est canoniquement isomorphe à $f_! f^! \Lambda \in \mathbf{D}^{\text{ét}}(k,\Lambda)$, où $f_!$ et $f^!$ sont les foncteurs « image directe à support propre » et « image inverse extraordinaire » en cohomologie étale.*

L'équivalence de catégories dans la proposition 1.26 (a) est dûe à Voevodsky. Toutefois, la preuve dans [13, Chapter 9] suppose que la dimension cohomologique de k est bornée. Du plus, dans loc. cit., on considère seulement les complexes bornés inférieurement. Pour la commodité du lecteur, on donne une preuve de ce résultat de Voevodsky sans ces hypothèses superflues. Notons que la preuve présentée ci-dessous est essentiellement la même que la preuve originale de [13] : on y retrouve les deux ingrédients essentiels, à savoir, le théorème de rigidité de Suslin [13, Theorem 7.20] ainsi que l'invariance par homotopie de la cohomologie étale [9, exposé XV].

Démonstration. Notons $\pi_0 : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{Et}/k$ le foncteur qui à un k-schéma lisse X associe le spectre de la clôture algébrique de k dans $\mathcal{O}_X(X)$. Ce foncteur est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion ι_0. Il vient que π_0^* est l'adjoint à gauche de ι_0^*. On en déduit un isomorphisme naturel $\iota_0^*(F) \simeq \pi_{0*}(F)$ pour tout préfaisceau F sur Et/k. Il facile de voir que le foncteur π_0 est continu pour les topologies étales, i.e., si F est un faisceau étale, il en est de même de $\pi_{0*}(F)$.

D'autre part, un faisceau étale sur Et/k possède des transferts, i.e., il est naturellement un foncteur contravariant additif de $\mathbf{Cor}(\mathsf{Et}/k)$, la sous-catégorie pleine $\mathbf{Cor}(k)$ ayant pour objets les k-schémas étales, à valeurs dans la catégorie des Λ-modules. Il est facile de voir que le foncteur π_0 s'étend canoniquement en un foncteur additif $\pi_0 : \mathbf{Cor}(k) \to \mathbf{Cor}(\mathsf{Et}/k)$ (voir [6, §1.2.1]). Ceci montre que si F est un faisceau étale, $\iota_0^*(F) \simeq \pi_{0*}(F)$ est naturellement un faisceau étale avec transferts. On obtient ainsi un foncteur

$$\pi_{0*} \simeq \iota_0^* : \mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k,\Lambda) \to \mathbf{Str}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda).$$

Ce foncteur est clairement l'adjoint à gauche de ι_{0*} qui consiste à restreindre un faisceau avec transferts sur Sm/k à la sous-catégorie Et/k. Comme $\iota_{0*} \circ \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \simeq \iota_{0*}$, on obtient un triangle commutatif à un isomorphisme près

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k,\Lambda) \arrow[r, "\iota_0^*"] \arrow[dr, bend right, "\iota_0^*"'] & \mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \arrow[d, "\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}"] \\ & \mathbf{Str}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda). \end{tikzcd}$$

De là, on déduit facilement que le foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \circ \iota_0^*$ est isomorphe, modulo l'équivalence $\mathbf{D}^{\text{ét}}(k,\Lambda) \simeq \mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k,\Lambda))$, au foncteur composé

$$\iota_0^* : \mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k,\Lambda)) \to \mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)) \to \mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda). \tag{17}$$

(Remarquer que le foncteur $\iota_0^* : \mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k,\Lambda) \to \mathbf{Str}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)$ est exact puisqu'il coïncide avec π_{0*} ; il se dérive donc trivialement.) Il suffit de montrer la proposition pour le foncteur (17). On divisera la preuve en trois parties.

Partie A. On montre ici que $\mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda)$ coïncide avec sa plus petite sous-catégorie triangulée (notée provisoirement $\mathcal{T}$) stable par petites sommes et contenant l'image de (17). Il suffit bien entendu de montrer que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X) \in \mathcal{T}$ pour tout k-schéma lisse X. Par [13, Lemma 9.15], $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ est isomorphe dans $\mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k,\Lambda)$ au complexe de Suslin–Voevodsky $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}_{\bullet}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)) = \underline{\mathrm{hom}}(\Delta^{\bullet}_k, \Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$, où $\Delta^{\bullet}_k$ est le schéma cosimplical usuel. Il suffit donc de montrer que le morphisme $\iota_0^*\iota_{0*}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$ est une équivalence ét-locale. Puisque les foncteurs ι_{0*} et ι_0^* sont exacts, on est ramené à montrer que $\iota_0^*\iota_{0*}(F) \to F$ est inversible (dans la catégorie des faisceaux) pour $F = \mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{H}_n(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)))$, un faisceau d'homologie de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}_{\bullet}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$. D'après [13, Corollary 2.19], le préfaisceau F est invariant par homotopie. Or, Λ est de torsion en tant que $\mathbb{Z}$-module et notre corps de base est de caractéristique nulle. Le théorème de rigidité de Suslin (voir [13, Theorem 7.20]) entraîne que F est localement constant, i.e., $\iota_0^*\iota_{0*}F \simeq F$.

Partie B. On montre maintenant que le foncteur (17) est une équivalence de catégories. Vu la partie A, il reste à montrer que ce foncteur est pleinement fidèle, i.e., que l'unité de l'adjonction $\mathrm{id} \to \mathsf{R}\iota_{0*}\iota_0^*$ est inversible. Étant donné que cela est vrai avant $\mathbb{A}^1$-localisation, i.e., pour le foncteur $\iota_0^* : \mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k,\Lambda)) \to \mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda))$ et son adjoint à droite, il suffira de montrer que $\iota_0^*(K)$ est $\mathbb{A}^1$-local pour tout $K \in \mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Et}/k,\Lambda))$. Autrement dit, il faut montrer que pour tout k-schéma lisse X le morphisme canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(X, \iota_0^*(K)_{|\mathsf{Et}/X}) \to \mathsf{R}\Gamma(\mathbb{A}^1_X, \iota_0^*(K)_{|\mathsf{Et}/\mathbb{A}^1_X})$$

est inversible. Il suffira de montrer que

$$\iota_0^*(K)_{|\mathsf{Et}/X} \to \mathsf{R}p_*(\iota_0^*(K)_{|\mathsf{Et}/\mathbb{A}^1_X})$$

est inversible avec $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ la projection canonique. Pour vérifier ceci, on ne restreint pas la généralité en supposant que k est algébriquement clos. Dans ce cas, la dimension cohomologique du site $\mathsf{Et}/\mathbb{A}^1_X$ est finie et le foncteur $\mathsf{R}p_*$ commute aux colimites filtrantes par [2, corollaire 4.5.61]. Un dévissage standard nous ramène alors au cas où K est un faisceau. On utilise alors l'invariance par homotopie de la cohomologie étale [9, exposé XV] pour conclure.

Partie C. Rappelons que le foncteur d'oubli des transferts se dérive trivialement. Il vient que l'équivalence inverse de (17) est donnée par $\mathsf{R}\iota_* \circ \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}$. On vérifie maintenant les parties

(b) et (c) de l'énoncé. On sait par [13, Theorem 4.1] que $\mathbb{Z}(1)[1] \in \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k, \mathbb{Z})$ est représenté par le faisceau $\mathcal{O}^\times = \mathbb{G}\mathrm{m}_k$. On déduit aussitôt un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \simeq \mu_n$ dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff,ét}}(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ en utilisant que $(-)^n : \mathcal{O}^\times \to \mathcal{O}^\times$ est surjectif de noyau μ_n. Puisque Λ est une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-algèbre et que le faisceau μ_n est plat sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on obtient des isomorphismes $\Lambda(r) \simeq \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mu_n^{\otimes r}$, pour $r \in \mathbb{N}$.

Soit maintenant X un k-schéma lisse. On cherche à construire un isomorphisme $\mathsf{R}\iota_{0*} \, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \, \Lambda_{\mathrm{tr}}(X) \simeq f_! f^! \Lambda$. L'équivalence (17) étant monoïdale, elle commute à la dualité dans les catégories $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{ét}}(\mathsf{Et}/k, \Lambda))$ et $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff,ét}}(k, \Lambda)$. Il en est de même de son quasi-inverse. Il suffira donc de construire un isomorphisme $\mathsf{R}\iota_{0*}\underline{\mathsf{Hom}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X), \Lambda) \simeq f_* f^*(\Lambda)$. Fixons $\Lambda_{\mathrm{cst}} \to I^\bullet$ une résolution injective de Λ_{cst} dans la catégorie des faisceaux étales avec transferts. Le complexe de faisceaux $\underline{\mathsf{Hom}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X), \Lambda)$ associe à $U \in \mathsf{Sm}/k$ le complexe $I^\bullet(X \times_k U)$. Le résultat découle maintenant du fait que la restriction de $I^\bullet$ au petit site étale de X est une résolution acyclique du faisceau constant Λ (voir [13, Lemma 6.23, Example 6.25]). Ceci termine la preuve de la proposition. □

Corollaire 1.27. *(On ne fait aucune hypothèse sur la caractéristique de Λ.) Les objets*

$$\text{Cône}\{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \to \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)\}, \tag{18}$$

$$\text{Cône}\{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)\} \tag{19}$$

sont dans la sous-catégorie $\mathbf{D}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \subset \mathbf{D}(\Lambda)$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \simeq \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) \otimes \Lambda$ et pareillement pour les bialgèbres motiviques, il suffit de traiter le cas $\Lambda = \mathbb{Z}$. Par le théorème 1.25, le foncteur $- \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n$ annule les cônes dans (18) et (19) pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\times$. Or, un complexe de $\mathbb{Z}$-modules K est quasi-isomorphe à un complexe de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels si et seulement si $K \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \simeq 0$ pour tout entier naturel non nul n. □

1.2.3. Lien avec les représentations $\boldsymbol{\ell}$-adiques. On fixe un nombre premier ℓ. Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ qu'on munit de sa norme non archimédienne $|\cdot|_\ell$ normalisée par $|\ell|_\ell = \ell^{-1}$ (ce choix de normalisation ne jouera aucun rôle dans la suite). On note $\mathcal{E} = \{e \in E,\ |e|_\ell \leq 1\}$ l'anneau des entiers de E.

Étant donné un groupe topologique G, on note $\mathcal{C}^0(G, E)$ l'ensemble des fonctions continues sur G à valeurs dans E (muni de la topologie induite par la norme $|\cdot|_\ell$). On note aussi $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \subset \mathcal{C}^0(G, E)$ le sous-ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathcal{E}$. On définit de la même manière $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E} \cdot \ell^{-n})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Rappelons qu'un groupe profini G est un groupe topologique compact (en particulier Hausdorff) et totalement discontinu. Un tel groupe est isomorphe à une limite projective cofiltrante de groupes finis munie de la topologie profinie. On a le résultat suivant.

Lemme 1.28. *Soit G un groupe profini. Il existe alors des isomorphismes canoniques :*

$$\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}/\ell^n) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} \operatorname*{colim}_{H \lhd G,\ \text{ouvert}} \hom(G/H, \mathcal{E}/\ell^n). \tag{20}$$

Par ailleurs, on a $\mathcal{C}^0(G, E) \simeq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E} \cdot \ell^{-n}) \simeq \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} E$.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{E}$, muni de sa topologie profinie, est la limite projective dans la catégorie des espaces topologiques des ensembles discrets $\mathcal{E}/\ell^n$. On obtient ainsi le premier isomorphisme de (20). Par ailleurs, une fonction continue de G dans l'ensemble fini $\mathcal{E}/\ell^n$ est localement constante. Or, tout recouvrement ouvert de G se raffine par la partition de G en translatés d'un sous-groupe distingué ouvert. Ceci montre le second isomorphisme de (20). Enfin, comme G est compact, l'image d'une fonction continue de G dans E est contenue dans l'un des $\mathcal{E} \cdot \ell^{-n}$. □

Soit G un groupe profini. La E-algèbre $\mathcal{C}^0(G, E)$ est une algèbre de Banach pour la norme infinie qui à une fonction continue f de G dans E associe $\|f\|_\infty = \sup_{g \in G} |f(g)|_\ell$. On a clairement $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E} \cdot \ell^{-n}) = \{f \in \mathcal{C}^0(G, E), \|f\|_\infty \leq \ell^n\}$ (pour $n \in \mathbb{Z}$). C'est un $\mathcal{E}$-module normé complet.

Dans la suite, on énoncera les résultats pour les coefficients dans l'anneau $\mathcal{E}$ et on laissera au lecteur l'extension, souvent facile, aux coefficients dans E.

Proposition 1.29. *Soient G_1 et G_2 deux groupes profinis. Il existe un isomorphisme $\mathcal{C}^0(G_1, \mathcal{E}) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(G_2, \mathcal{E}) \simeq \mathcal{C}^0(G_1 \times G_2, \mathcal{E})$, où $- \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} -$ désigne le produit tensoriel complété de $\mathcal{E}$-modules normés.*

Démonstration. Notons $\mathcal{E}^\delta$ l'anneau $\mathcal{E}$ muni de la topologie discrète. Il est clair que $\mathcal{C}^0(G_i, \mathcal{E}^\delta)$ (resp. $\mathcal{C}^0(G_1 \times G_2, \mathcal{E}^\delta)$) est un sous-anneau dense de $\mathcal{C}^0(G_i, \mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{C}^0(G_1 \times G_2, \mathcal{E})$). On munit ces anneaux de la norme infinie. Le morphisme canonique

$$\mathcal{C}^0(G_1, \mathcal{E}^\delta) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(G_1, \mathcal{E}^\delta) \to \mathcal{C}^0(G_1 \times G_2, \mathcal{E}^\delta),$$

qui associe à un tenseur $f_1 \otimes f_2$ la fonction $(g_1, g_2) \rightsquigarrow f(g_1) \cdot f(g_2)$ sur $G_1 \times G_2$, est un isomorphisme isométrique. Ceci se vérifie immédiatement en se ramenant au cas où G_1 et G_2 sont des groupes finis. En complétant pour la norme infinie, on obtient le résultat recherché. □

Corollaire 1.30. *Soit G un groupe profini. Alors $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ est une algèbre de Hopf dans la catégorie des $\mathcal{E}$-modules normés et complets, et des morphismes linéaires continus.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.29. □

Comme dans la section 1.2.1, on note $\bar{k} \subset \mathbb{C}$ la clôture algébrique de k déduite du plongement complexe σ. On dispose d'un morphisme canonique

$$\varphi : \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathcal{E})$$

de $\mathcal{E}$-algèbres. Il est obtenu à l'aide du théorème 1.25 en prenant la composition de

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathcal{E}) \to \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathcal{E}/\ell^n) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathcal{E}/\ell^n) \simeq \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathcal{E}).$$

On note le résultat suivant.

Proposition 1.31. *Le morphisme $\varphi : \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathcal{E})$ est compatible aux comultiplications.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la composition de φ avec

$$\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathcal{E}) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathcal{E}/\ell^n)$$

est un morphisme de bialgèbres biunitaires pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci découle immédiatement de la construction. □

Supposons toujours que G est un groupe profini. Il agit à gauche et à droite sur le $\mathcal{E}$-module $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$. L'action à gauche de $g \in G$ est donnée par $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \rightsquigarrow f \circ l_g^{-1}$ avec $l_g : h \in G \rightsquigarrow gh$ la multiplication à gauche par g. L'action à droite de $g \in G$ est donnée par $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \rightsquigarrow f \circ r_g^{-1}$ avec $r_g : h \in G \rightsquigarrow hg$ la multiplication à droite par g. On a le résultat suivant.

Lemme 1.32. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le sous-$\mathcal{E}$-module engendré par les $f \circ l_g$ (pour $g \in G$) est de type fini.*

(ii) *Le sous-$\mathcal{E}$-module engendré par les $f \circ r_g$ (pour $g \in G$) est de type fini.*

(iii) *$cm(f)$ est dans le sous-$\mathcal{E}$-module $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \subset \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$.*

Le même énoncé reste vrai en remplaçant partout $\mathcal{E}$ par E.

Démonstration. Il s'agit d'un résultat standard. Cependant, nous incluons une preuve.

Par symétrie, il suffit de montrer l'équivalence entre (i) et (iii). Supposons d'abord que (i) est vérifiée et soit $V' \subset \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ le sous-module engendré par les $f \circ l_g$ (pour $g \in G$). On pose $V = \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ell^{-n} \cdot V')$ que l'on munit de la norme infinie. Puisque V est libre de rang fini (et en particulier complet), il suffira de montrer que

$$cm(f) \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} V \simeq \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V.$$

Ceci équivaut à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cm(f \bmod \ell^n) \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}/\ell^n) \otimes_{\mathcal{E}/\ell^n} (V/\ell^n)$ où cm est la comultiplication de l'algèbre de Hopf $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}/\ell^n)$. Comme V/ℓ^n est fini, l'action de G se factorise par un quotient fini G_0 de G. Il s'ensuit que la fonction $q = f \bmod \ell^n$ se factorise aussi par G_0. Or, $cm(q) = \sum_{g \in G_0} e_g \otimes q \circ l_g$, modulo l'identification de $\hom(G_0, \mathcal{E}/\ell^n)$ au sous-groupe de $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}/\ell^n)$ qui lui correspond. Ceci montre que

$$cm(q) \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}/\ell^n) \otimes_{\mathcal{E}/\ell^n} (V/\ell^n).$$

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ telle que $cm(f) = \sum_{\alpha \in A} f_{1,\alpha} \otimes f_{2,\alpha}$ avec A un ensemble fini et $f_{i,\alpha} \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$. Clairement, $f \circ l_g$ est l'image de g par la composition de

$$\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \xrightarrow{cm} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_g \hat{\otimes} \mathrm{id}} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}),$$

où $\mathrm{ev}_g : \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ est le morphisme d'évaluation en g. On déduit aussitôt que $f \circ l_g$ est dans le sous-module engendré par la famille $(f_{2,\alpha})_{\alpha \in A}$. Ceci termine la preuve du lemme. □

Définition 1.33. Une fonction $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ est dite G-*finie* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes du lemme 1.32. On note $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \subset \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ le sous-ensemble des fonctions continues G-finies.

Corollaire 1.34. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ une fonction G-finie. Alors, $cm(f)$ est dans le sous-module*
$$\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \subset \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}).$$
En particulier, $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})$ est une algèbre de Hopf de la catégorie des $\mathcal{E}$-modules.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ une fonction G-finie et notons V l'intersection de $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ avec le sous-E-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(G, E)$ engendré par les $f \circ l_g$, pour $g \in G$. Dans la preuve du lemme 1.32 et notamment de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), nous avons établi que $cm(f) \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V$. Or, tout élément de V est une fonction G-finie. On déduit donc que $cm(f) \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})$. Par symétrie, on obtient aussi $cm(f) \in \mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$. Il s'ensuit que
$$cm(f) \in \big(\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})\big) \cap \big(\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})\big) = \mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}).$$
Pour terminer, il reste à voir que le sous-ensemble $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \subset \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ est invariant par l'antipode. Mais ceci est clair puisque $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ vérifie la condition (i) du lemme 1.32 si et seulement si la fonction $x \in G \rightsquigarrow f(x^{-1})$ vérifie la condition (ii) du même lemme. □

On a le résultat simple mais utile ci-dessous. Sa preuve est laissée en exercice.

Lemme 1.35. *Notons $\mathcal{E}^\delta$ l'anneau $\mathcal{E}$ muni de la topologie discrète. Alors, $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}^\delta)$ est une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})$. En particulier, $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})$ est dense dans $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$.*

Corollaire 1.36. *Les $\mathcal{E}$-modules*
$$\frac{\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})}{\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}^\delta)}, \quad \frac{\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})}{\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}^\delta)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})}{\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})}$$
sont des E-espaces vectoriels.

Démonstration. Il suffit de montrer que le deuxième et le troisième $\mathcal{E}$-module sont des E-espaces vectoriels. Notons $M \subset \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ l'un des $\mathcal{E}$-modules $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}^\delta)$ ou $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})$. Clairement la condition $\ell \cdot f \in M$ entraîne que $f \in M$. Il vient que $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})/M$ est sans torsion. Il reste donc à voir que ce quotient est ℓ-divisible. Soit $f \in \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$ et notons $[f]$ sa classe dans $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})/M$. Par le lemme 1.35, M est dense dans $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$. Il existe donc $f_0 \in M$ tel que $\|f - f_0\|_\infty \leq \ell^{-1}$. La fonction $g = \ell^{-1}(f - f_0) \in \mathcal{C}^0(G, E)$ est à valeurs dans $\mathcal{E}$. Autrement dit, c'est un élément dans $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$. De plus, on a $[f] = [f - f_0] = \ell \cdot [g]$. Donc $[f]$ est divisible par ℓ. □

Proposition 1.37. (a) *Soit V un $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$-comodule à gauche dans la catégorie des $\mathcal{E}$-modules normés complets. Supposons que V est de type fini. Alors, l'image de la coaction $ca_V : V \to \mathcal{C}^0(G, \mathcal{E}) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} V$ est contenue dans le sous-module $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V$. Autrement dit, V est naturellement un $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})$-module.*

(b) *Réciproquement, tout $\mathcal{C}^0_f(G, \mathcal{E})$-comodule V qui est de type fini sur $\mathcal{E}$ définit d'une manière essentiellement unique un $\mathcal{C}^0(G, \mathcal{E})$-comodule dans la catégorie des $\mathcal{E}$-modules normés complets.*

Les mêmes énoncés sont vrais pour $\mathcal{E}$ remplacé par E.

Démonstration. Notons V_{tor} le sous-$\mathcal{E}$-module de torsion de V ; c'est un sous-comodule de V. Par le corollaire 1.36, $\mathcal{C}^0_f(G,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V_{\text{tor}} \simeq \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{E}}} V_{\text{tor}}$. L'assertion de (a) et donc trivialement vérifiée pour V_{tor}. Ceci nous ramène à considérer le cas du comodule V/V_{tor}. Autrement dit, on peut supposer que V est un $\mathcal{E}$-module libre de rang fini.

Le $\mathcal{E}$-module $\mathcal{C}^0(-,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V$ est normé complet, i.e., $\mathcal{C}^0(-,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V \simeq \mathcal{C}^0(-,\mathcal{E}) \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{E}}} V$. Notons ca'_V la coaction sur V vue comme un morphisme de V dans le produit tensoriel abstrait $\mathcal{C}^0(-,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V$. Fixons une base $(v_i)_{i=1,\ldots,n}$ de V. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on a $ca_V(v_i) = ca'_V(v_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} \otimes v_j$ avec $f_{ij} \in \mathcal{C}^0(G,E)$. Il faut prouver que les fonctions f_{ij} sont G-finies. On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "ca'_V"] \arrow[d, "ca_V"'] & \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes ca'_V"] & \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} V \arrow[d] \\
\mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{E}}} V \arrow[rr, "cm \hat{\otimes} \mathrm{id}_V"] & & \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{E}}} \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{E}}} V.
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que $cm(f_{ij}) \in \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^0(G,\mathcal{E})$. La partie (a) est démontrée. La partie (b) est claire. □

Revenons maintenant à la situation qui nous préoccupe. On a le résultat suivant.

Proposition 1.38. *Le morphisme $\varphi : \mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathcal{E}) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E})$ se factorisent uniquement par le sous-module $\mathcal{C}^0_f(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E})$. On obtient ainsi un morphisme d'algèbres de Hopf $\varphi : \mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathcal{E}) \to \mathcal{C}^0_f(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E})$.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathcal{E}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{cm}"'] & \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E}) \arrow[dd, "\mathrm{cm}"] \\
\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathcal{E}) \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"'] & \\
\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E}) \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathcal{E}}} \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E}).
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que l'image de $\mathrm{H}_0(\varphi)$ est contenue dans $\mathcal{C}^0_f(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E})$. L'existence et l'unicité de la factorisation découle du corollaire 2.105 de [5] qui affirme que $\mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathcal{E})) = 0$ pour $i < 0$. La preuve du corollaire 2.105 de [5] utilise le théorème 1.25 ; le lecteur vérifiera facilement qu'il n'y a pas de cercles vicieux. □

Soit M un objet de $\mathbf{DA}(k,\mathcal{E})$. On sait que $\mathsf{Bti}^*(M)$ est naturellement un comodule à gauche sur l'algèbre de Hopf motivique $\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathcal{E})$. Par corestriction suivant φ, on déduit une structure de $\mathcal{C}^0_f(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E})$-module à gauche sur $\mathsf{Bti}^*(M)$. Ceci détermine une représentation du $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur le complexe $\mathsf{Bti}^*(M)$. Un élément $g \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit à gauche sur $\mathsf{Bti}^*(M)$ par la composition de

$$\mathsf{Bti}^*(M) \xrightarrow{\mathrm{ca}} \mathsf{Bti}^*(M) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{C}^0_f(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}_g} \mathsf{Bti}^*(M).$$

Ces représentations généralisent les représentations ℓ-adiques sur la cohomologie étale des k-schémas. En effet, on a le résultat suivant.

Proposition 1.39. *Il existe un isomorphisme* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$*-équivariant*

$$\mathsf{Bti}^*(X\otimes\mathcal{E})\simeq \mathrm{H}^{\text{ét}}_{\bullet}(X\otimes_k \bar{k},\mathcal{E})$$

entre l'homologie singulière et l'homologie étale d'un k*-schéma lisse* X*.*

Démonstration. Notons $f : X\to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural de X et $\bar{f}=f\otimes_k\bar{k}$ son changement de base à $\bar{k}$. On a

$$\mathrm{H}^{\text{ét}}_{\bullet}(X\otimes_k\bar{k},\mathcal{E})\simeq \bar{f}_!\bar{f}^!\mathcal{E}.$$

On définit un isomorphisme $\mathsf{Bti}^*(X\otimes\mathcal{E})\simeq\bar{f}_!\bar{f}^!\mathcal{E}$ par la limite projective des isomorphismes $\mathsf{Bti}^*(X\otimes(\mathcal{E}/\ell^n))\simeq\bar{f}_!\bar{f}^!(\mathcal{E}/\ell^n)$ égaux aux compositions de

$$\begin{aligned}(21)\quad \mathsf{Bti}^*(X\otimes(\mathcal{E}/\ell^n)) &\simeq \mathsf{Bti}^*\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\iota_0^*\mathsf{R}\iota_{0*}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(X\otimes(\mathcal{E}/\ell^n))\\ &\simeq \mathsf{Bti}^*\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}\iota_0^* f_!f^!(\mathcal{E}/\ell^n)\simeq\sigma^*f_!f^!(\mathcal{E}/\ell^n)\simeq\bar{f}_!\bar{f}^!(\mathcal{E}/\ell^n).\end{aligned}$$

(Ci-dessus, on utilise la proposition 1.26.) Il suffit donc de montrer que la composition de (21) est $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-équivariante. Ceci est une conséquence directe des constructions. On laisse les détails au lecteur. □

On termine cette section avec la conjecture suivante qui fait désormais partie du folklore motivique.

Conjecture 1.40. *Supposons que le corps* k *est de type fini sur son sous-corps premier* $\mathbb{Q}$*. Alors le morphisme canonique* $\varphi:\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})\to\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Q}_\ell)$ *est injectif sur l'homologie.*

La conjecture 1.40 affirme en particulier que le complexe $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$ est acyclique en degré non nul. On reviendra sur cette propriété plus tard. La proposition suivante donne deux formulations équivalentes de la conclusion de la conjecture 1.40.

Proposition 1.41. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) $\varphi:\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})\to\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Q}_\ell)$ *est injectif sur l'homologie.*

(b) $\varphi:\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})\to\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)$ *est injectif sur l'homologie.*

(c) *Tout élément* ℓ*-divisible (i.e., divisible par toutes les puissances de* ℓ*) dans l'homologie de* $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})$ *est nul.*

Démonstration. Clairement, (b) entraîne (a). Réciproquement, pour montrer que (a) entraîne (b), il suffit de voir que la ℓ-torsion est nulle dans l'homologie de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})$. Ceci découle immédiatement du corollaire 1.27 qui affirme que l'homologie de

$$\mathrm{Cône}\big\{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z})\to\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})\big\}$$

est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Par le lemme 1.42 ci-dessous, la condition (c) entraîne la condition (b). Par ailleurs, si (b) est vérifiée, les $\mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z}))$ sont nuls pour $i\neq 0$ et $\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z}))$ n'a pas d'éléments ℓ-divisibles non nuls puisque c'est le cas pour le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)$. □

Lemme 1.42. *Les $\mathbb{Z}$-modules*

$$\ker\{\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)\} \quad et \quad \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})),$$

pour $i \neq 0$, sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.

Démonstration. Par le corollaire 1.27, l'homologie de

$$\mathrm{Cône}\{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})\}$$

est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Ceci montre que les $\mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z}))$ sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels pour tout $i \neq 0$. Il en est de même du quotient $\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z}))/\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z})$. Il reste à voir que $\ker\{\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})) \to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Or, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}\ker\{\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})) &\to \mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)\} \\ &\simeq \ker\left\{\frac{\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z}))}{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z})} \to \frac{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)}{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z})}\right\}.\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)/\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On a une suite exacte courte

$$0 \to \frac{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell^\delta)}{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z})} \to \frac{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)}{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z})} \to \frac{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell)}{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}_\ell^\delta)} \to 0,$$

où $\mathbb{Z}_\ell^\delta$ est l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ muni de la topologie discrète. Par le corollaire 1.30, le membre de droite de cette suite exacte est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. D'autre part, le membre de gauche est isomorphe à $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k),\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z})$. Or, $\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Le lemme est donc démontré. □

2. Groupes de Galois motiviques relatifs et groupes fondamentaux motiviques

Dans cette section, on étudie la dépendance des groupes de Galois motiviques $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ par rapport au corps k. Plus précisément, étant donnés une extension K/k et un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, on dispose d'un morphisme de pro-schémas en groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$. On verra que ce morphisme est surjectif si et seulement si K/k est géométriquement connexe. Son noyau est ce qu'on appellera le groupe de Galois motivique relatif de K/k. On donnera aussi des conditions qui assurent que $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$ est un produit semi-direct de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ et de ce groupe relatif. La preuve de cette décomposition repose sur la théorie des motifs des variétés rigides. Cette théorie fournit aussi les analogues motiviques des groupes de décomposition et d'inertie d'une valuation discrète, bien connus en théorie de Galois classique.

Par ailleurs, on définit des algèbres de Hopf fondamentaux motiviques $\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X,x,\Lambda)$ associés à des k-schémas pointés (X,x). C'est une algèbre de Hopf dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$ intimement liée au groupe fondamental topologique de (X^{an},x). Étant donnée une k-courbe pointée (C,c) qui est un revêtement étale d'un ouvert Zariski de $\mathbb{A}_k^1$, nous montrerons que $\mathsf{Bti}^*\mathcal{F}(C,c,\Lambda)$ est une algèbre de Hopf concentrée en degré zéro et que son spectre est un quotient du complété pro-algébrique du groupe fondamental de (C^{an}, c). Ceci est certainement le résultat le plus frappant de cet article.

On commence par des compléments au formalisme Tannakien faible développé dans la section 1 de [5].

2.1. Compléments au formalisme Tannakien faible de la section 1 de [5]. Cette section doit être lue comme la suite de la section 1 de [5] notamment en ce qui concerne les conventions et les notations. On y trouve quelques compléments nécessaires pour certaines constructions qui seront effectuées dans le reste de la section.

2.1.1. Produit tensoriel semi-direct de bialgèbres. Fixons une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$. Fixons également une bialgèbre biunitaire H de $\mathcal{C}$. On supposera que H est commutative de sorte que $\mathrm{coMod}(H)$ est encore une catégorie monoïdale. Soit K une bialgèbre biunitaire de $\mathrm{coMod}(H)$. Pour simplifier, on supposera aussi que K est commutative. La donnée de K équivaut à celle d'une bialgèbre biunitaire K de $\mathcal{C}$ munie d'une structure de H-comodule counitaire (K, ca_K) telle que les morphismes structuraux $m : K \otimes K \to K$, $cm : K \to K \otimes K$, $u : \mathbb{1} \to K$ et $cu : K \to \mathbb{1}$ sont des morphismes de H-comodules (où $\mathbb{1}$ est considéré comme un H-comodule trivial et $K \otimes K$ est muni de la structure de H-comodule du corollaire 1.25 de [5]). De même, se donner un K-comodule counitaire dans $\mathrm{coMod}(H)$ revient à se donner un triplet (X, ca_X^K, ca_X^H) avec (X, ca_X^H) un H-comodule counitaire et (X, ca_X^K) un K-comodule counitaire tel que ca_X^K est un morphisme de H-comodules. Dans la suite, on notera $\mathrm{coMod}(K, H)$ la catégorie des K-comodules unitaires dans $\mathrm{coMod}(H)$ et on réservera la notation $\mathrm{coMod}(K)$ pour la catégorie des K-comodules unitaires dans $\mathcal{C}$. Voici quelques exemples d'objets dans $\mathrm{coMod}(K, H)$.

Exemple 2.1. (a) Un objet A de $\mathcal{C}$ muni des coactions triviales de H et K définit un objet de $\mathrm{coMod}(K, H)$. Ceci fournit un foncteur $c'' : \mathcal{C} \to \mathrm{coMod}(K, H)$ qui est une 2-section monoïdale au foncteur d'oubli des coactions $o'' : \mathrm{coMod}(K, H) \to \mathcal{C}$.

(b) Le triplet (K, cm, ca_K) est un objet de $\mathrm{coMod}(K, H)$. De même, H munie de la coaction triviale de K et la coaction cm de H est un objet de $\mathrm{coMod}(K, H)$. On en déduit aussitôt l'objet $K \otimes H$ de $\mathrm{coMod}(K, H)$ qui jouera un rôle important dans la suite. Les coactions de K et H sur $K \otimes H$ sont données respectivement par les compositions de

$$K \otimes H \xrightarrow{cm \otimes \mathrm{id}} (K \otimes K) \otimes H \simeq K \otimes (K \otimes H)$$

et de

$$K \otimes H \xrightarrow{ca_K \otimes cm} (H \otimes K) \otimes (H \otimes H) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}} (H \otimes H) \otimes (K \otimes H) \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} H \otimes (K \otimes H).$$

On dispose d'un triangle commutatif de foncteurs d'oubli et d'un triangle commutatif de foncteurs « comodule trivial » :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{coMod}(K,H) \arrow[r, "o'"] \arrow[dr, bend right, "o''"'] & \mathrm{coMod}(H) \arrow[d, "o"] \\ & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{coMod}(K,H) & \mathrm{coMod}(H) \arrow[l, "c'"'] \\ & \mathcal{C}. \arrow[u, "c"'] \arrow[ul, bend left, "c''"] \end{tikzcd}$$

De plus, on a les égalités $o \circ c = \mathrm{id}$, $o' \circ c' = \mathrm{id}$ et $o'' \circ c'' = \mathrm{id}$. Par le lemme 1.53 de [5], les foncteurs o, o' possèdent des adjoints à droites r et r' donnés par $r(-) = H \otimes -$ et

$r'(-) = K \otimes -$. On pose $r'' = r' \circ r$. C'est un adjoint à droite de o''. Pour un objet Y de $\mathcal{C}$, on a $r''(Y) = (K \otimes H) \otimes Y$ où $K \otimes H$ est l'objet de $\mathrm{coMod}(K, H)$ décrit dans l'exemple 2.1 et Y est muni des coactions triviales.

Il est facile de voir que l'unité de l'adjonction (o'', r'') est donnée par la composition de

$$X \xrightarrow{ca_X^K} K \otimes X \xrightarrow{ca_X^H} K \otimes (H \otimes X) \simeq (K \otimes H) \otimes X$$

pour tout objet (X, ca_X^K, ca_X^H) de $\mathrm{coMod}(K, H)$. La counité de cette adjonction est donnée par la composition de $(K \otimes H) \otimes (-) \xrightarrow{cu \otimes cu} (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \otimes (-) \simeq (-)$. Le résultat ci-dessous découle immédiatement du lemme 1.54 de [5].

Lemme 2.2. *Le foncteur* $o'' : \mathrm{coMod}(K, H) \to \mathcal{C}$ *et sa* 2*-section* c'' *vérifient l'hypothèse* 1.20 *de* [5].

Par le théorème 1.21 de [5], $o'' \circ r''(\mathbb{1}) \simeq (K \otimes H)$ est une bialgèbre biunitaire. Explicitons les morphismes structuraux de cette bialgèbre. L'algèbre, $r''(\mathbb{1})$ est obtenue par application du foncteur pseudo-monoïdal r' à l'algèbre $r(\mathbb{1}) \simeq H$. En revenant aux définitions, on voit que la multiplication de $r'(H)$ est donnée par la composition de

$$\begin{aligned}(K \otimes H) \otimes (K \otimes H) &\xrightarrow{ca} K \otimes ((K \otimes H) \otimes (K \otimes H)) \\ &\xrightarrow{cu \otimes cu} K \otimes ((\mathbb{1} \otimes H) \otimes (\mathbb{1} \otimes H)) \simeq K \otimes (H \otimes H) \xrightarrow{m} K \otimes H.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que cette multiplication n'est autre que la multiplication naturelle sur le produit tensoriel de deux algèbres, i.e., celle déduite du lemme 1.2 de [5]. Pour déterminer la comultiplication de $o'' \circ r''(\mathbb{1})$, on doit d'abord calculer le morphisme de coprojection

$$c_d : r''(A) \otimes X \to r''(A \otimes o''(X)) \tag{22}$$

pour A dans $\mathcal{C}$ et X dans l'image de c''. Modulo les isomorphismes $r'' = r' \circ r$ et $o'' = o \circ o'$, le morphisme de coprojection (22) est la composition de deux morphismes de coprojections : $r'r(A) \otimes X \to r'(r(A) \otimes o'(X))$ et $r'(r(A) \otimes o'(X)) \to r'r(A \otimes oo'(X))$. Ainsi, en utilisant la preuve du lemme 1.54 de [5], on voit que si X est muni des coactions triviales, (22) est l'isomorphisme d'associativité $((K \otimes H) \otimes A) \otimes X \simeq (K \otimes H) \otimes (A \otimes X)$. On arrive alors à l'énoncé suivant.

Lemme 2.3. *On garde les hypothèses et notations ci-dessus.*

(a) *L'algèbre* $K \otimes H$ *munie de la comultiplication donnée par la composition de*

$$\begin{aligned}K \otimes H &\xrightarrow{cm \otimes cm} K \otimes (K \otimes H) \otimes H \xrightarrow{ca_K} K \otimes ((H \otimes K) \otimes H) \otimes H \\ &\xrightarrow[\sim]{\tau} K \otimes ((H \otimes H) \otimes K) \otimes H \xrightarrow{m} (K \otimes H) \otimes (K \otimes H)\end{aligned}$$

est une bialgèbre commutative et biunitaire de $\mathcal{C}$. *Elle est appelée le* produit tensoriel semi-direct *de* K *par* H *et sera notée* $K \circledast H$.

(b) *Soit* (X, ca_X^K, ca_X^H) *un objet de* $\mathrm{coMod}(K, H)$. *Alors* X *est un* $(K \circledast H)$*-comodule pour la coaction égale à la composition de*

$$X \xrightarrow{ca_X^K} K \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes ca_X^H} K \otimes (H \otimes X) \simeq (K \otimes H) \otimes X.$$

On obtient ainsi un foncteur monoïdal et unitaire $\tilde{o}'' : \mathrm{coMod}(K, H) \to \mathrm{coMod}(K \circledast H)$.

On dispose de deux morphismes de bialgèbres biunitaires $s_1 : K \circledast H \to K$ et $s_2 : K \circledast H \to H$ donnés respectivement par $\mathrm{id} \otimes cu$ et $cu \otimes \mathrm{id}$ modulo les isomorphismes $K \otimes \mathbb{1} \simeq K$ et $\mathbb{1} \otimes H \simeq H$. On peut donc associer à un $(K \circledast H)$-comodule unitaire (X, ca_X) un triplet $(X, (s_1 \otimes \mathrm{id}_X) \circ ca_X, (s_2 \otimes \mathrm{id}_X) \circ ca_X)$. On a le résultat suivant.

Lemme 2.4. *Le triplet* $(X, (s_1 \otimes \mathrm{id}_X) \circ ca_X, (s_2 \otimes \mathrm{id}_X) \circ ca_X)$ *est un objet de* $\mathrm{coMod}(K, H)$. *De plus, en appliquant le foncteur* $\tilde{o}'' : \mathrm{coMod}(K, H) \to \mathrm{coMod}(K \circledast H)$ *à ce triplet, on retrouve le* $(K \circledast H)$*-comodule* X.

Démonstration. Pour la première assertion, on doit montrer que $(s_1 \otimes \mathrm{id}_X) \circ ca_X$ est un morphisme de H-comodules. Il suffit alors de considérer le cas de $X = (K \circledast H)$. En effet, si l'on munit le facteur X dans $(K \circledast H) \otimes X$ de la coaction triviale, $ca_X : X \to (K \circledast H) \otimes X$ est un morphisme de $(K \circledast H)$-comodules et la flèche ca_X admet une section dans $\mathcal{C}$. Pour traiter le cas de $K \circledast H$, on remarque que la composition de

$$K \circledast H \xrightarrow{cm} (K \circledast H) \otimes (K \circledast H) \to (K \otimes \mathbb{1}) \otimes (K \otimes H) \simeq K \otimes (K \otimes H)$$

est égale à la composition de $K \otimes H \xrightarrow{cm \otimes \mathrm{id}} (K \otimes K) \otimes H \simeq K \otimes (K \otimes H)$ ce qui est clairement un morphisme de H-comodules. Pour la seconde partie de l'énoncé, on pose $ca_X^K = (s_1 \otimes \mathrm{id}_X) \circ ca_X$ et $ca_X^H = (s_2 \otimes \mathrm{id}_X) \circ ca_X$. Il faut montrer que ca_X est la composition de

$$X \xrightarrow{ca_X^K} K \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes ca_X^H} K \otimes (H \otimes X) \simeq (K \otimes H) \otimes X.$$

On se ramène comme avant au cas où $X = K \circledast H$. Étant donné que le foncteur $\tilde{o}''$ est monoïdal, il suffit même de traiter séparément le cas de K et H. Les détails sont laissés au lecteur. □

Corollaire 2.5. *Le foncteur* $\tilde{o}'' : \mathrm{coMod}(K, H) \to \mathrm{coMod}(K \circledast H)$ *est un isomorphisme de catégories monoïdales.*

2.1.2. Un critère de décomposition de H en un produit tensoriel semi-direct. Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{E}$ des catégories monoïdales, et $f_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{E}$, $f_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{E}$ et $k : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ des foncteurs monoïdaux. On suppose que ces foncteurs admettent des adjoints à droites qu'on notera respectivement g_1, g_2 et l, et on suppose donné un isomorphisme de foncteurs monoïdaux $f_1 \simeq f_2 \circ k$. On en déduit aussitôt un isomorphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux $l \circ g_2 \simeq g_1$. On supposera dans toute cette section que les conditions ci-dessous sont satisfaites.

Hypothèse 2.6. (a) Il existe des foncteurs monoïdaux $e_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{M}_1$, $e_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{M}_2$ et $s : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, ainsi que des isomorphismes de foncteurs monoïdaux $e_1 \simeq s \circ e_2$, $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} \simeq f_1 \circ e_1$, $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} \simeq f_2 \circ e_2$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_1} \simeq k \circ s$. On suppose aussi que les compositions de $f_2 k s e_2 \simeq f_1 e_1 \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et $f_k s e_2 \simeq f_2 e_2 \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ sont égales.

(b) Les morphismes de coprojection

$$g_i(A) \otimes e_i(B) \to g_i(A \otimes f_i e_i(B)) \quad \text{et} \quad l(C) \otimes s(D) \to l(C \otimes ks(D))$$

sont inversibles pour $i \in \{1, 2\}$, $A, B \in \mathcal{E}$ et $C, D \in \mathcal{M}_2$.

L'hypothèse 2.6 entraîne les hypothèses de la section 1.5.1 de [5] en prenant l'isomorphisme $e_2 \simeq k \circ e_1$ égal à la composition de $e_2 \simeq k \circ s \circ e_2 \simeq k \circ e_1$. On pose $\mathrm{L} = k \circ l(\mathbb{1})$. C'est une bialgèbre commutative et biunitaire de $\mathcal{M}_2$. Puisque f_2 est un foncteur monoïdal, $f_2(\mathrm{L})$ est bialgèbre commutative et biunitaire de $\mathcal{E}$. De même, on dispose de deux bialgèbres biunitaires $\mathrm{H}_1 = f_1 \circ g_1(\mathbb{1})$ et $\mathrm{H}_2 = f_2 \circ g_2(\mathbb{1})$ dans $\mathcal{E}$.

Théorème 2.7. (a) *Munissons* $f_2(\mathrm{L})$ *de la structure de* H_2*-comodule décrite dans la proposition* 1.28 *de* [5]. *Les flèches structurales de la bialgèbre* $f_2(\mathrm{L})$ *sont alors des morphismes de* H_2*-comodules, i.e.,* $f_2(\mathrm{L})$ *est une bialgèbre biunitaire de* $\mathrm{coMod}(\mathrm{H}_2)$. *De plus, l'isomorphisme* $\alpha : \mathrm{H}_1 \simeq f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2$*, égal à la composition de*

$$\begin{aligned}\alpha : f_1 g_1(\mathbb{1}) \simeq f_2 k l g_2(\mathbb{1}) \simeq f_2 k l(\mathbb{1} \otimes g_2(\mathbb{1}))& \\ \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f_2 k(l(\mathbb{1}) \otimes s g_2(\mathbb{1})) \simeq f_2 k l(\mathbb{1}) \otimes f_2 g_2(\mathbb{1}),&\end{aligned}$$

identifie la bialgèbre H_1 *avec le produit semi-direct* $f_2(\mathrm{L}) \circledast \mathrm{H}_2$.

(b) *Soit* X *un objet de* $\mathcal{M}_1$. *La composition de*

$$\begin{aligned}(23)\qquad \beta_X : f_2 k(X) &\xrightarrow{\mathrm{ca}_X} f_2(kl(\mathbb{1}) \otimes k(X)) \simeq f_2 k l(\mathbb{1}) \otimes f_2 k(X) \\ &= f_2(\mathrm{L}) \otimes f_2 k(X) \xrightarrow{\mathrm{ca}_{k(X)}} (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \otimes f_2 k(X)\end{aligned}$$

définit une structure de $(f_2(\mathrm{L}) \circledast \mathrm{L})$*-comodule sur* $f_2 k(X)$. *De plus, l'isomorphisme* $f_1(X) \simeq f_2 k(X)$ *est compatible aux coactions de* H_1 *et* $f_2(\mathrm{K}) \circledast \mathrm{H}_2$.

Démonstration. On démontre d'abord (b) qui garde un sens indépendemment de la validité de (a).

Étant donné que le foncteur $\tilde{f_2} : \mathcal{M}_2 \to \mathrm{coMod}(\mathrm{H}_2)$ est monoïdal, il est clair que $f_2(\mathrm{L})$ est une bialgèbre de $\mathrm{coMod}(\mathrm{H}_2)$. On peut donc former le produit tensoriel semi-direct $f_2(\mathrm{L}) \circledast \mathrm{H}_2$. Par ailleurs, il est facile de voir que $(f_2 k(X), \beta_X)$ est un $(f_2(\mathrm{L}) \circledast \mathrm{H}_2)$-comodule counitaire. En effet, $(f_2 k(X), \mathrm{ca}_{k(X)})$ est un H_2-comodule counitaire. Or, $(k(X), \mathrm{ca}_X)$ est un L-comodule counitaire. Ceci entraîne $(f_2 k(X), f_2\, \mathrm{ca}_X)$ est un $f_2(\mathrm{L})$-comodule counitaire dans $\mathrm{coMod}(\mathrm{H}_2)$. Pour obtenir la première assertion de (b), on utilise la seconde partie du lemme 2.3 et on vérifie que la coaction ainsi obtenue coïncide avec β_X.

Notons $t : f_1(-) \to (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \otimes f_1(-)$ la transformation naturelle donnée par la composition de (23) modulo l'isomorphisme $f_2 k \simeq f_1$. Il est facile de montrer que t est une opération au sens de la définition 1.31 de [5]. On utilise pour cela que les coactions $\mathrm{ca} : k(-) \to \mathrm{L} \otimes k(-)$ et $\mathrm{ca} : f_2(-) \to \mathrm{H}_2 \otimes f_2(-)$ sont des opérations. Par ailleurs, on peut vérifier que la composition de

$$f_1 g_1(\mathbb{1}) \xrightarrow{t} (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \otimes f_1 g_1(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{cu}} (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \otimes \mathbb{1} \simeq (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2)$$

est égale au morphisme α de la partie (a) de l'énoncé. Ainsi, la proposition 1.32 de [5] permet de conclure que t est égale à la composition de

$$f_1(X) \xrightarrow{\mathrm{ca}} \mathrm{H}_1 \otimes f_1(-) \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha}} (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \otimes f_1(-).$$

Ceci démontre la seconde assertion de (b).

On passe maintenant à la partie (a) de l'énoncé. Il s'agit de voir que α est un morphisme de bialgèbres. Le fait que α est un morphisme d'algèbres est clair. On se concentre donc sur la compatibilité de α avec la comultiplication.

En prenant $X = g_1(\mathbb{1})$ dans (b), on se ramène à montrer que le carré

$$\begin{tikzcd}
f_2klg_2(\mathbb{1}) \arrow[r, "\beta_{lg_2(\mathbb{1})}"] \arrow[d, "\alpha'"', "\sim"] & (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \otimes f_2klg_2(\mathbb{1}) \arrow[d, "\sim"', "\mathrm{id}\otimes\alpha'"] \\
f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2 \arrow[r, "\mathrm{cm}"] & (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \otimes (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2)
\end{tikzcd}$$

est commutatif avec α' la composition de

$$f_2klg_2(\mathbb{1}) \simeq f_2kl(\mathbb{1} \otimes g_2(\mathbb{1})) \xrightarrow[\sim]{\theta} f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \simeq f_2kl(\mathbb{1}) \otimes f_2g_2(\mathbb{1}).$$

En d'autres termes, il s'agit de montrer que l'isomorphisme $\alpha' : f_2klg_2(\mathbb{1}) \simeq f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2$ est un morphisme de $(f_2(\mathrm{L}) \circledast \mathrm{H}_2)$-comodules. Par le corollaire 2.5, il suffit de montrer que α' est un morphisme de $f_2(\mathrm{L})$-comodules et de H_2-comodules.

Le fait que α' est un morphisme de H_2-comodules est clair puisque α' s'obtient (modulo des isomorphismes évidents) par l'application de f_2 à un morphisme de $\mathcal{M}_2$. Pour montrer que α' est un morphisme de $f_2(\mathrm{L})$-comodules, on considère les deux diagrammes suivants :

(24)

$$\begin{tikzcd}
f_2klg_2(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\eta"'] & f_2kl(\mathbb{1} \otimes g_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\eta"] & f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \arrow[d, "\eta"] \\
f_2klklg_2(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & f_2klkl(\mathbb{1} \otimes g_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] & f_2klk(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \arrow[d, "\sim"] \\
f_2kl(\mathbb{1} \otimes klg_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\theta"', "\sim"] & f_2kl(\mathbb{1} \otimes kl(\mathbb{1} \otimes g_2(\mathbb{1}))) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "\theta"] & f_2kl(\mathbb{1} \otimes k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1}))) \arrow[d, "\sim"', "\theta"] \\
f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sklg_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes skl(\mathbb{1} \otimes g_2(\mathbb{1}))) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] & f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sk(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1}))) \arrow[d, "\sim"] \\
f_2kl(\mathbb{1}) \otimes f_2klg_2(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] & f_2kl(\mathbb{1}) \otimes f_2kl(\mathbb{1} \otimes g_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] & f_2kl(\mathbb{1}) \otimes f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1}))
\end{tikzcd}$$

et

(25)

$$\begin{tikzcd}
f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\eta"'] & f_2kl(\mathbb{1}) \otimes f_2g_2(\mathbb{1}) \arrow[d, "\eta"] \\
f_2klk(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \arrow[d, "\sim"'] & f_2klkl(\mathbb{1}) \otimes f_2g_2(\mathbb{1}) \arrow[d, "\sim"] \\
f_2kl(\mathbb{1} \otimes k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1}))) \arrow[d, "\theta"', "\sim"] & f_2kl(\mathbb{1} \otimes kl(\mathbb{1})) \otimes f_2g_2(\mathbb{1}) \arrow[d, "\sim"', "\theta"] \\
f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sk(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1}))) \arrow[d, "\sim"'] & f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes skl(\mathbb{1})) \otimes f_2g_2(\mathbb{1}) \arrow[d, "\sim"] \\
f_2kl(\mathbb{1}) \otimes f_2k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\sim"] & (f_2kl(\mathbb{1}) \otimes f_2kl(\mathbb{1})) \otimes f_2g_2(\mathbb{1}).
\end{tikzcd}$$

Tous les carrés du premier diagramme commutent pour des raisons triviales. Le second diagramme commute aussi. En effet, modulo des isomorphismes évidents, il est équivalent au diagramme obtenu en appliquant f_2 à

$$\begin{tikzcd} k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\mathrm{ca}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{L} \otimes k(l(\mathbb{1}) \otimes sg_2(\mathbb{1})) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{L} \otimes (kl(\mathbb{1}) \otimes g_2(\mathbb{1})) \arrow[d, "\sim"] \\ kl(\mathbb{1}) \otimes g_2(\mathbb{1}) \arrow[rr, "\mathrm{ca} \otimes \mathrm{id}"] & & (\mathrm{L} \otimes kl(\mathbb{1})) \otimes g_2(\mathbb{1}). \end{tikzcd}$$

Or, ce dernier diagramme commute puisque ca : $k(-) \to \mathrm{L} \otimes k(-)$ est une opération. En inspectant le bord des diagrammes (24) et (25), on déduit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_2klg_2(\mathbb{1}) \arrow[rr, "\mathrm{ca}"] \arrow[d, "\alpha'"'] & & f_2(\mathrm{L}) \otimes f_2klg_2(\mathbb{1}) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \alpha'"] \\ f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2 \arrow[r, "\mathrm{cm} \otimes \mathrm{id}"] & (f_2(\mathrm{L}) \otimes f_2(\mathrm{L})) \otimes \mathrm{H}_2 \arrow[r, "\sim"] & f_2(\mathrm{L}) \otimes (f_2(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{H}_2) \end{tikzcd}$$

commute. C'est exactement ce que l'on cherchait à démontrer. □

2.2. Une algèbre de Hopf motivique pour les variétés analytiques rigides. On se donne ici un corps k de caractéristique nulle muni d'une valuation non archimedienne non triviale $\upsilon : k \to \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$. La norme $|\cdot| : k \to \mathbb{R}$ associée à υ est donnée par $|a| = r^{-\upsilon(a)}$ avec $r > 1$ un nombre réel. On note k° l'anneau de valuation de υ, $k^{\vee}$ son idéal maximal et $\tilde{k} = k^{\circ}/k^{\vee}$ son corps résiduel qu'on supposera de caractéristique nulle. Pour simplifier, on supposera que la valuation υ est discrète, et qu'il existe une inclusion $\tilde{k} \hookrightarrow k$ dont l'image est contenue dans k° et telle que la composition de $\tilde{k} \hookrightarrow k^{\circ} \twoheadrightarrow \tilde{k}$ est l'identité. On note aussi $\hat{k}$ le complété de k relativement à $|\cdot|$ et on identifie k, via l'inclusion canonique, à un sous-corps de $\hat{k}$. La valuation de k s'étend par continuité en une valuation $\upsilon : \hat{k} \to \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ et on a $\upsilon(k) = \upsilon(\hat{k})$. Les propriétés analogues sont vraies pour la norme associée. De plus, on a $k^{\circ} = \hat{k}^{\circ} \cap k$, $k^{\vee} = \hat{k}^{\vee} \cap k$ et le corps résiduel de $\hat{k}$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{k}$. On se donne enfin un plongement complexe $\tilde{\sigma} : \tilde{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

On rappelle d'abord quelques constructions et résultats tirés de [3] et on introduit ensuite des foncteurs de réalisations pour les motifs des $\hat{k}$-variétés rigides qu'on associe naturellement à $\tilde{\sigma}$. On se limitera à la topologie de Nisnevich pour rester conforme à [3]. On notera $\mathbb{B}^n_{\hat{k}} = \mathrm{Spm}(\hat{k}\{t_1, \ldots, t_n\})$ la boule de Tate de dimension $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathbb{B}^n_X = \mathbb{B}^n_{\hat{k}} \hat{\times}_{\hat{k}} X$ pour toute k-variété rigide X.

2.2.1. La réalisation de Betti pour les motifs rigides et l'algèbre de Hopf associée. On note $\mathsf{SmRig}/\hat{k}$ la catégorie des $\hat{k}$-variétés rigides lisses qu'on munie de la topologie Nisnevich (cf. [3, §1.2]). On dispose d'une structure de modèles projective Nis-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{SmRig}/\hat{k}, \Lambda))$ (cf. [3, définition 1.3.2]). Une localisation de Bousfield fournit la structure $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale pour laquelle les flèches $\mathbb{B}^1_Y \otimes \Lambda[n] \to Y \otimes \Lambda[n]$ sont des équivalences faibles pour toute $\hat{k}$-variété rigide lisse Y et tout $n \in \mathbb{Z}$. La catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale est notée $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff}}(\hat{k}, \Lambda)$. C'est la catégorie triangulée des motifs (effectifs et sans transferts) des $\hat{k}$-variétés analytiques rigides.

On dispose d'un foncteur $Rig : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{SmRig}/\hat{k}$ qui envoie un k-schéma X sur la $\hat{k}$-variété analytique rigide X^{rig} associée au $\hat{k}$-schéma $(X \otimes_k \hat{k})$. (On utilise une notation différente de celle de [3] pour désigner la variété analytique rigide associée à X afin de distinguer cette dernière de la variété analytique complexe associée à X par le biais d'un plongement complexe de k.) Le foncteur Rig induit un foncteur de Quillen à gauche

$$Rig^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{SmRig}/\hat{k}, \Lambda))$$

lorsqu'on munit la source et le but des structures projectives $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locale et $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale respectivement. On en déduit une adjonction

$$\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda) \underset{\mathsf{Rig}^{\mathrm{eff}}_*}{\overset{\mathsf{Rig}^{\mathrm{eff},*}}{\rightleftarrows}} \mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff}}(\hat{k},\Lambda).$$

On choisit un remplacement projectivement cofibrant $T^{\mathrm{rig}}_{\hat{k}}$ du préfaisceau quotient

$$(\mathbb{A}^{1,\mathrm{rig}}_{\hat{k}} \otimes \Lambda)/\big((\mathbb{A}^{1,\mathrm{rig}}_{\hat{k}} - o_{\hat{k}}) \otimes \Lambda\big).$$

On note

$$\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T^{\mathrm{rig}}_{\hat{k}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{SmRig}/\hat{k},\Lambda)))$$

la catégorie des $T^{\mathrm{rig}}_{\hat{k}}$-spectres symétriques en complexes de préfaisceaux sur $\mathsf{SmRig}/\hat{k}$. On munit cette catégorie de la structure de modèles projective stable déduite de la structure projective $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale (cf. [2, §4.3]). La catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale stable est notée $\mathbf{RigDA}(\hat{k},\Lambda)$ (cf. [3, définition 1.3.19]). C'est la catégorie triangulée des motifs (sans transferts) des $\hat{k}$-variétés analytiques rigides. On dispose d'un foncteur de suspension infinie

$$\mathrm{Sus}^{\mathbf{0}}_{T^{\mathrm{rig}}_{\hat{k}}} : \mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff}}(\hat{k},\Lambda) \to \mathbf{RigDA}(\hat{k},\Lambda).$$

De plus, en prenant $T^{\mathrm{rig}}_{\hat{k}} = Rig^*(T_k)$, on obtient un foncteur de Quillen à gauche

$$Rig^* : \mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda))) \to \mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T^{\mathrm{rig}}_{\hat{k}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{SmRig}/\hat{k},\Lambda)))$$

lorsqu'on munit la source et le but des structures projectives $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locale et $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale stables respectivement. On en déduit une adjonction

$$\mathbf{DA}(k,\Lambda) \underset{\mathsf{Rig}_*}{\overset{\mathsf{Rig}^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{RigDA}(\hat{k},\Lambda).$$

De plus, les foncteurs $\mathsf{Rig}^{\mathrm{eff},*}$ et Rig^* sont compatibles aux foncteurs de suspension infinie.

On fixe à présent une uniformisante $\pi \in k^{\vee}$. On en déduit un isomorphisme $\hat{k} = \tilde{k}((\pi))$. Étant donné un $\tilde{k}$-schéma lisse X, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^{\times})$ et $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, on pose

$$Q^{gm}_r(X,f) = X[t,t^{-1},v]/(v^r - f\cdot t)$$

qu'on considère comme un schéma sur $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} = \mathrm{Spec}(\tilde{k}[t,t^{-1}])$. On note

$$\mathbf{QUDA}(\tilde{k},\Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda)$$

la plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies et contenant les objets $\mathrm{Sus}^{0}_{T_{\mathbb{G}\mathrm{m}}}(Q^{gm}_r(X,f)\otimes\Lambda)$ ainsi que leurs twists de Tate. Le résultat principal de [3, chapitre I] s'énonce alors comme suit.

Théorème 2.8 (cf. [3, scholie 1.3.26]). *Le foncteur composé*

$$\mathfrak{F} : \mathbf{QUDA}(\tilde{k},\Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{DA}(k,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} \mathbf{RigDA}(\hat{k},\Lambda)$$

est une équivalence de catégories.

On fixe un quasi-inverse $\mathfrak{K}$ à $\mathfrak{F}$.

Définition 2.9. On note $\mathfrak{s}^* : \mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda) \to \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda)$ la composition de

$$\mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathfrak{K}}} \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda) \xrightarrow{1^*} \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda).$$

La réalisation de Betti pour les motifs rigides $\mathsf{RigBti}^* : \mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$, associée au plongement complexe $\tilde{\sigma} : \tilde{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ du corps résiduel de $\hat{k}$, est le foncteur composé $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} \circ \mathfrak{s}^*$ avec $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} : \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ la réalisation de Betti usuelle.

On aura besoin du diagramme de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$-schémas $\mathcal{R}$ introduit dans [2, définition 3.5.3]. La catégorie d'indices de $\mathcal{R}$ est $\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times$, où $\mathbf{\Delta}$ est la catégorie des simplexes et $\mathbb{N}^\times$ est l'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$ ordonné par la relation opposée à celle de divisibilité. On a $\mathcal{R}(\underline{\mathbf{n}}, r) = \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \times_{\tilde{k}} (\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}})^n$ et son morphisme structural (de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$-schéma) est la composition de la projection sur le premier facteur avec le morphisme d'élévation à la puissance r de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$. Autrement dit, $\mathcal{R}(\underline{\mathbf{n}}, r) = Q_r^{gm}((\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}})^n, 1)$. Étant donnés des entiers non nuls r et d, le morphisme $\mathcal{R}(\underline{\mathbf{n}}, rd) \to \mathcal{R}(\underline{\mathbf{n}}, r)$ est l'élévation à la puissance d sur chaque facteur. Le schéma cosimplicial $\mathcal{R}(-, r)$ ne dépend pas de $r \in \mathbb{N}^\times$. Son morphisme face $\mathrm{d}_i : \mathcal{R}(\underline{\mathbf{n}}, r) \to \mathcal{R}(\underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}}, r)$ est induit par l'immersion diagonale du $(i+1)$-ème facteur si $i \leq n$ et consiste en l'insertion d'un 1 au $(n+2)$-ème facteur si $i = n+1$. Ses morphismes de dégénérescence s_i sont donnés par la projection suivant le $(i+2)$-ème facteur.

Notons $(\theta, \mathrm{p}) = \mathrm{p} \circ \theta : \mathcal{R} \to \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ la projection canonique, i.e., p est l'unique foncteur de $\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times$ vers la catégorie finale et θ est le morphisme de $(\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$-diagrammes de schémas de $\mathcal{R}$ vers le diagramme constant $(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$ donné par les morphismes structuraux des $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$-schémas. On pose alors $\mathcal{U} = \mathrm{p}_\sharp\, \theta_* \Lambda_{\mathcal{R}}(0)$, où $\Lambda_{\mathcal{R}}(0) = \mathrm{Sus}^0_{T_{\mathcal{R}}}(\Lambda_{\mathrm{cst}})$ est l'objet unité de $\mathbf{DA}(\mathcal{R})$. Autrement dit, $\mathcal{U}$ est la colimite homotopique du « motif simplicial » donné en $\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}$ par la colimite filtrante suivant $r \in \mathbb{N}^\times$ des motifs cohomologiques des $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$-schémas $Q_r^{gm}((\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}})^n, 1)$. En particulier, $\mathcal{U}$ est un objet de $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. De plus, on a le résultat suivant.

Proposition 2.10. *Le foncteur $\mathfrak{s}^*$ admet un adjoint à droite*

$$\mathfrak{s}_* : \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda) \to \mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda).$$

Il est donné par $\mathfrak{s}_*(-) = \mathfrak{F}(\mathcal{U} \otimes q^*(-))$, avec $q : \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \to \mathrm{Spec}(\tilde{k})$ la projection structurale.

Démonstration. Vu les équivalences $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{K}$, il s'agit de montrer que la restriction de $1^* : \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda) \to \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda)$ à $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$ admet un adjoint à droite donné par $\mathcal{U} \otimes q^*(-)$. Pour cela, nous allons construire un homomorphisme

$$\hom_{\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda)}(M, \mathcal{U} \otimes q^*(N)) \to \hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda)}(1^* M, N), \tag{26}$$

binaturel en $M \in \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}})$ et $N \in \mathbf{DA}(\tilde{k})$, et on prouvera qu'il est inversible pour $M \in \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. Pour construire (26), on remarque qu'on a un morphisme de diagrammes de $(\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$-schémas $u : (\mathrm{Spec}(\tilde{k}), \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \to (\mathcal{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$ donné par la section unité du tore $(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}})^{n+1}$ au-dessus de chaque objet $(\underline{\mathbf{n}}, r) \in \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times$. On en déduit un morphisme canonique $\mathcal{U} \to 1_*\Lambda(0)$ donné par la composition de

$$\mathcal{U} = \mathrm{p}_\sharp\, \theta_* \Lambda_{\mathcal{R}}(0) \to \mathrm{p}_\sharp\, \theta_* u_* u^* \Lambda_{\mathcal{R}}(0) \simeq \mathrm{p}_\sharp\, 1_*\, \mathrm{p}^*\, \Lambda_{\tilde{k}}(0) \simeq 1_*\Lambda(0).$$

Par adjonction, on obtient alors le morphisme cu : $1^*\mathcal{U} \to \Lambda(0)$. L'homomorphisme (26) est défini par la composition de

$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda)}(M, \mathcal{U} \otimes q^*(N)) &\xrightarrow{1^*} \hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)}(1^*M, 1^*(\mathcal{U} \otimes q^*(N)))\\ &\xrightarrow{\sim} \hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)}(1^*M, 1^*\mathcal{U} \otimes 1^*q^*N)\\ &\xrightarrow{\mathrm{cu}} \hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)}(1^*M, N).\end{aligned}$$

Pour montrer que (26) est inversible lorsque $M \in \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$, on peut se restreindre à un ensemble de générateurs compacts de $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. Ainsi, on peut supposer que $M = \mathrm{Sus}^0_{T_{\mathbb{G}\mathrm{m}}}(Q^{gm}_r(X, f) \otimes \Lambda)$ avec $r \in \mathbb{N}^\times$, $X \in \mathsf{Sm}/\tilde{k}$ et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$. Dans ce cas, on a $e_r^*M \simeq q^*M_0$ avec e_r l'endomorphisme d'élévation à la puissance r de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ et $M_0 = \mathrm{Sus}^0_{T_{\tilde{k}}}(X[\sqrt[r]{f}] \otimes \Lambda)$. Par ailleurs, on a l'égalité $e_r \circ (\theta, \mathrm{p}) = (\theta, \mathrm{p}) \circ \iota_r$ avec $\iota_r : (\mathcal{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}) \to (\mathcal{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N})$ l'endomorphisme induit par le foncteur ι_r donné par $(\underline{\mathbf{n}}, d) \rightsquigarrow (\underline{\mathbf{n}}, rd)$. On en déduit aussitôt un isomorphisme canonique $\mathcal{U} \simeq e_{r*}\mathcal{U}$. (On utilise pour cela que ι_r est cofinal.) Or, il est facile de voir que la composition de

$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda)}(M, \mathcal{U} \otimes q^*(N)) &\xrightarrow{\sim} \hom_{\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda)}(M, e_{r*}(\mathcal{U}) \otimes q^*(N))\\ &\xrightarrow{\sim} \hom_{\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda)}(M, e_{r*}(\mathcal{U} \otimes e_r^*q^*(N)))\\ &\xrightarrow{\sim} \hom_{\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda)}(e_r^*M, \mathcal{U} \otimes q^*(N))\\ &\xrightarrow{(26)} \hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)}(1^*e_r^*M, N)\\ &\xrightarrow{\sim} \hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)}(1^*M, N)\end{aligned}$$

coïncide avec (26). Quitte à remplacer M par e_r^*M, on peut donc supposer qu'il existe $M_0 \in \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda)$ avec $M = q^*M_0$. Dans ce cas, il suffit de montrer que

$$\hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)}(M_0, q_*(\mathcal{U} \otimes q^*(N))) \to \hom_{\mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)}(M_0, N)$$

est inversible. Cet homomorphisme est induit par la composition de

$$q_*(\mathcal{U} \otimes q^*(N)) \simeq (q_*\mathcal{U}) \otimes N \xrightarrow{\eta} (q_*1_*1^*\mathcal{U}) \otimes N \simeq 1^*\mathcal{U} \otimes N \xrightarrow{\mathrm{cu}} N.$$

Il suffit donc de montrer que la composition de $q_*\mathcal{U} \xrightarrow{\eta} q_*1_*1^*\mathcal{U} \simeq 1^*\mathcal{U} \xrightarrow{\mathrm{cu}} \Lambda(0)$ est inversible. Or, cette composée est une rétraction à la composition de $\Lambda(0) \to q_*\Lambda(0) \xrightarrow{\mathrm{u}} q_*\mathcal{U}$ avec $\mathrm{u} : \Lambda(0) \to \mathcal{U}$ l'unité de l'algèbre $\mathcal{U}$. De plus, pour $r \in \mathbb{N}^\times$ fixé, le morphisme de $\tilde{k}$-schémas cosimpliciaux $(\mathcal{R}(-, r), \mathbf{\Delta}) \to (\mathrm{Spec}(\tilde{k}), \mathbf{\Delta})$ est une équivalence d'homotopie cosimpliciale par [2, corollaire 3.4.5]. Le résultat découle maintenant de [2, corollaire 3.4.12]. □

Lemme 2.11. *L'hypothèse* 2.6 *est vérifiée avec* $\mathcal{M}_1 = \mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda)$, $\mathcal{M}_2 = \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda)$, $\mathcal{E} = \mathbf{D}(\Lambda)$, $k = \mathfrak{s}^*$, $f_1 = \mathsf{RigBti}^*$ *et* $f_2 = \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}$.

Démonstration. On prendra pour e_i les foncteurs « motif constant » qui, à un complexe de Λ-modules C, associent les spectres symétriques

$$\mathrm{Sus}^0_{T^{\mathrm{rig}}_{\hat{k}}}(C_{\mathrm{cst}}) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Sus}^0_{T_{\tilde{k}}}(C_{\mathrm{cst}})$$

selon que $i = 1$ ou $i = 2$. On prendra pour s le foncteur composé $\mathfrak{F} \circ q^*$ avec $q^* : \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda) \to \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$ l'image inverse suivant la projection structurale de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$. Toutes les conditions recherchées sont claires sauf celles de la partie (b) de l'hypothèse 2.6. En fait, dans notre cas, on a même plus, à savoir : les morphismes de coprojection associés aux adjonctions (f_i, g_i) et (k, l) sont inversibles. On vérifie cela uniquement pour les paires $(f_2, g_2) = (\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}, \mathsf{Bti}_{\tilde{k}*})$ et $(k, l) = (\mathfrak{s}^*, \mathfrak{s}_*)$ puisque $f_1 = f_2 \circ k$. Pour la première paire, la propriété recherchée a déjà été établie (cf. proposition 2.7 (b) de [5]). Pour la seconde paire, on utilise la proposition 2.10. Le lemme est démontré. □

Par les théorèmes 1.21 et 1.45 de [5], on dispose de trois algèbres de Hopf. La première est $\mathcal{H}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{k}, \tilde{\sigma}, \Lambda) = \mathsf{RigBti}^*\mathsf{RigBti}_*\Lambda$, la seconde $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(\tilde{k}, \tilde{\sigma}, \Lambda) = \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}\mathsf{Bti}_{\tilde{k}*}\Lambda$ nous est déjà connue et la troisième $\mathfrak{s}^*\mathfrak{s}_*\Lambda(0) \simeq 1^*\mathcal{U}$ est une algèbre de Hopf de $\mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda)$. De plus, le théorème 2.7 fournit le résultat suivant.

Proposition 2.12. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{k}, \tilde{\sigma}, \Lambda) \simeq \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U}) \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(\tilde{k}, \tilde{\sigma}, \Lambda)$$

d'algèbres de Hopf dans $\mathbf{D}(\Lambda)$.

Dans le reste de la section, nous allons décrire la réalisation de Betti de l'algèbre de Hopf $1^*\mathcal{U}$. Considérons le système inductif de Λ-modules $(\mathcal{L}_e)_{e \in \mathbb{N}^\times}$ où

$$\mathcal{L}_e = \bigoplus_{0 \le r \le e-1} (\Lambda \cdot \alpha_{e,r} \oplus \Lambda \cdot \gamma_{e,r})$$

et le morphisme de transition $t : \mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_{de}$ (avec $d \in \mathbb{N}^\times$) est donné par

$$t(\alpha_{e,r}) = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{de,ie+r} \quad \text{et} \quad t(\gamma_{e,r}) = d \cdot \sum_{i=0}^{d-1} \gamma_{de,ie+r} + \sum_{i=0}^{d-1} i \cdot \alpha_{de,ie+r}.$$

On note $\mathcal{L} = \mathrm{colim}_{e \in \mathbb{N}^\times} \mathcal{L}_e$. On dispose d'un morphisme canonique

$$u : \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda) \to \mathcal{L} \tag{27}$$

avec $\hat{\mathbb{Z}}(1) = \lim_{n \in \mathbb{N}^\times} \mu_n(\mathbb{C})$. Il associe à une fonction $f : \mu_n(\mathbb{C}) \to \Lambda$ la classe de $\sum_{r=0}^{n-1} f(\exp(\frac{r}{n})) \cdot \alpha_{n,r}$ où $\exp(z) = \mathrm{e}^{2\pi i z}$. En fait, on obtient une structure naturelle de $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)$-module sur $\mathcal{L}$ en faisant agir $f : \mu_n(\mathbb{C}) \to \Lambda$ suivant les formules

$$f \cdot \alpha_{ne,s} = f\Big(\exp\Big(\frac{s}{n}\Big)\Big) \cdot \alpha_{ne,s} \quad \text{et} \quad f \cdot \gamma_{ne,s} = f\Big(\exp\Big(\frac{s}{n}\Big)\Big) \cdot \gamma_{ne,s}.$$

Alors, u est un morphisme de $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)$-modules. La vérification des propriétés élémentaires ci-dessous est laissée au lecteur.

Lemme 2.13. (a) *Le conoyau de* (27) *est un* $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda \otimes \mathbb{Q})$*-module libre de rang* 1 *engendré par la classe de* $\gamma_{1,0}$.

(b) *Si* Λ *est de torsion, alors* (27) *est un isomorphisme.*

(c) *Si* Λ *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre, alors* $\mathcal{L}$ *est un* $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)$*-module libre de rang* 2*. Il admet une base naturelle donnée par* $(\alpha_{1,0}, \gamma_{1,0})$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{L}(n) = \mathrm{Sym}^n(\mathcal{L})$; le produit symétrique étant pris dans la catégorie des $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}, \Lambda)$-modules. Le morphisme (27) induit des morphismes $\mathcal{L}(n) \to \mathcal{L}(n+1)$ et on pose $\widehat{\mathcal{L}} = \mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}}\, \mathcal{L}(n)$. C'est une $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)$-algèbre commutative. On peut maintenant énoncer la description promise de la réalisation de Betti de $1^*\mathcal{U}$.

Théorème 2.14. *Il existe un isomorphisme canonique d'algèbres commutatives*

$$\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U}) \simeq \widehat{\mathcal{L}}.$$

Notons $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \times_{\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}} \mathrm{Spec}(k)$, où le produit fibré est pris dans la catégorie des diagrammes de schémas et $\mathrm{Spec}(k)$ s'envoie dans $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ par la section unité. Notons (θ_1, p) la projection du diagramme $(\mathcal{R}_1, \boldsymbol{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$ sur $\mathrm{Spec}(k)$. On a alors un isomorphisme canonique $1^*\mathcal{U} \simeq \mathrm{p}_\sharp\, \theta_{1*}\Lambda(0)$. La catégorie $\lrcorner$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathbf{1}} \times \underline{\mathbf{1}}$ ayant pour ensemble d'objets le complémentaire de $(0,0)$. On dispose d'un foncteur $\mathrm{r} : \lrcorner \to \boldsymbol{\Delta}$ tel que $\mathrm{r}(0,1) = \mathrm{r}(1,0) = \underline{\mathbf{0}}$ et $\mathrm{r}(1,1) = \underline{\mathbf{1}}$, et qui envoie les flèches $(0,1) \to (1,1)$ et $(1,0) \to (1,1)$ sur $\mathrm{d}_0 : \underline{\mathbf{0}} \to \underline{\mathbf{1}}$ et $\mathrm{d}_1 : \underline{\mathbf{0}} \to \underline{\mathbf{1}}$ respectivement. On pose $\mathcal{C} = \mathcal{R} \circ (\mathrm{r} \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}^\times})$ et on note $(\delta, \mathrm{q}) : (\mathcal{C}, \lrcorner \times \mathbb{N}^\times) \to \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ la projection structurale. Comme avant, on pose $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \times_{\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}} \mathrm{Spec}(k)$ et on note (δ_1, q) sa projection sur $\mathrm{Spec}(k)$. On établit d'abord un résultat préliminaire.

Proposition 2.15. *Il existe un isomorphisme canonique* $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(\mathrm{q}_\sharp \delta_{1*}\Lambda(0)) \simeq \mathcal{L}$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, le $\lrcorner$-diagramme de $\tilde{k}$-schémas $\mathcal{C}_1(-,n)$ est le suivant :

$$\mu_{n,\tilde{k}} \xrightarrow{\Delta} \mu_{n,\tilde{k}} \times_{\tilde{k}} \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \xleftarrow{\mathrm{id} \times 1} \mu_{n,\tilde{k}},$$

où $\mu_{n,\tilde{k}} \subset \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ est le sous-$\tilde{k}$-schéma en groupe des racines n-ième de l'unité et Δ est l'immersion diagonale. On cherche à identifier $\mathcal{L}$ avec la colimite suivant $n \in \mathbb{N}^\times$ des pushout homotopiques des réalisations de Betti des diagrammes de motifs $\delta_1(-,n)_*\Lambda(0)$. (Bien entendu, $\delta_1(-,n) : (\mathcal{C}_1(-,n), \lrcorner) \to (\mathrm{Spec}(\tilde{k}), \lrcorner)$ est le morphisme canonique.) Or, la réalisation de Betti se calcule à l'aide du diagramme d'espaces topologiques

$$\mu_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Delta} \mu_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{U} \xleftarrow{\mathrm{id} \times 1} \mu_n(\mathbb{C}), \tag{28}$$

avec $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}^\times$ le cercle unité. Pour $0 \leq s \leq n-1$, on note $x_{n,s}$ le point $\exp(\frac{s}{n}) \in \mathrm{U}$. On obtient alors une subdivision de U par les arcs $A_{n,s} = \overline{x_{n,s}x_{n,s+1}}$ avec la convention $x_{n,n} = x_{n,0}$. L'homologie de U se calcule alors à l'aide du complexe à deux termes non nuls

$$0 \to \bigoplus_{s=0}^{n-1} \Lambda \cdot [A_{n,s}] \xrightarrow{d} \bigoplus_{t=0}^{n} \Lambda \cdot [x_{n,s}] \to 0, \tag{29}$$

où $d([A_{n,s}]) = [x_{n,s+1}] - [x_{n,s}]$. On en déduit aussitôt que le pullback homotopique du diagramme des complexes singuliers associés à (28) est la somme directe suivant $0 \leq r \leq n-1$ des complexes à deux termes non nuls

$$(30) \qquad 0 \to \Big(\bigoplus_{s=0}^{n-1} \Lambda \cdot [A_{n,s}]\Big) \oplus \big(\Lambda \cdot [x_{n,r}] \times \Lambda \cdot [x_{n,0}]\big) \xrightarrow{d} \bigoplus_{t=0}^{n} \Lambda \cdot [x_{n,s}] \to 0,$$

où $d(a \cdot [x_{n,r}], b \cdot [x_{n,0}]) = -a \cdot [x_{n,r}] + b \cdot [x_{n,0}]$ et $d([A_{n,s}]) = [x_{n,s+1}] - [x_{n,s}]$. Contrairement à (29), ce complexe est maintenant placé en degré homologiques 0 et -1. L'homologie du complexe (30) est nulle sauf en degré zéro où elle est librement engendrée par les deux éléments $\gamma^\vee_{n,r} = \sum_{s=0}^{n-1}[A_{n,s}]$ et $\alpha^\vee_{n,r} = ([x_{n,r}], [x_{n,0}]) + \sum_{0 \leq s \leq r-1}[A_{n,r}]$. Par ailleurs, si $d \in \mathbb{N}^\times$, le morphisme $\mathcal{C}_1(-, dn) \to \mathcal{C}_1(-, n)$ induit (sur le pullback homotopique de l'homologie) un morphisme

$$t^\vee : \bigoplus_{0 \leq e \leq dn-1} \big(\Lambda \cdot \alpha^\vee_{dn,e} \oplus \Lambda \cdot \gamma^\vee_{dn,e}\big) \to \bigoplus_{0 \leq r \leq n-1} \big(\Lambda \cdot \alpha^\vee_{n,r} \oplus \Lambda \cdot \gamma^\vee_{n,r}\big).$$

Le lecteur vérifiera aussitôt qu'on a les formules

$$t^\vee(\gamma^\vee_{dn,e}) = d \cdot \gamma^\vee_{n,r} \quad \text{et} \quad t^\vee(\alpha^\vee_{dn,e}) = q \cdot \gamma^\vee_{n,r} + \alpha^\vee_{n,r},$$

où q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de e par n. Le résultat recherché s'obtient maintenant en dualisant, i.e., en prenant les bases duaux et les matrices transposées, et en passant à la colimite suivant les $n \in \mathbb{N}^\times$. □

Considérons le diagramme de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$-schémas $(\mathcal{E}, \mathbb{N}^\times) = \mathcal{R}(\underline{\mathbf{0}}, -)$. Il est donné en $n \in \mathbb{N}^\times$ par le revêtement étale $(-)^n : \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \to \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$. On note $(\mathrm{e}, \mathrm{p}_{\mathbb{N}^\times}) : (\mathcal{E}, \mathbb{N}^\times) \to \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ la projection structurale. On pose aussi $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \times_{\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}} \mathrm{Spec}(\tilde{k})$ (où $\mathrm{Spec}(k)$ s'envoie dans $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ par la section unité) et on note $(\mathrm{e}_1, \mathrm{p}_{\mathbb{N}^\times})$ sa projection sur $\mathrm{Spec}(\tilde{k})$. On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 2.16. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}((\mathrm{p}_{\mathbb{N}^\times})_\sharp\, \mathrm{e}_{1*}\, \Lambda(0)) \simeq \mathscr{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda).$$

De plus, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}((\mathrm{p}_{\mathbb{N}^\times})_\sharp\, \mathrm{e}_{1*}\, \Lambda(0)) & \longrightarrow & \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(\mathrm{q}_\sharp \delta_{1*} \Lambda(0)) \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ \mathscr{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda) & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathscr{L} \end{array}$$

est commutatif; la flèche horizontale supérieure étant induite par le morphisme évident $(\mathcal{C}_1, \lrcorner \times \mathbb{N}^\times) \to (\mathcal{E}_1, \mathbb{N}^\times)$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, le morphisme $\mathrm{e}_1(n)$ est la projection de $\mu_{n,\tilde{k}}$ sur $\mathrm{Spec}(\tilde{k})$. La réalisation de Betti de $\mathrm{e}_1(n)_*\Lambda(0)$ est donc isomorphe à $\hom(\mu_n(\mathbb{C}), \Lambda)$ (morphismes d'ensembles !). Ceci donne l'isomorphisme de l'énoncé. La commutation du carré découle de la preuve de la proposition 2.15. □

Le foncteur $\mathrm{r} : \lrcorner \to \mathbf{\Delta}$ induit un isomorphisme $\mathrm{r}^*\, \theta_{1*}\Lambda(0) \simeq \delta_{1*}\Lambda(0)$. On en déduit un morphisme $\mathrm{q}_\sharp \delta_{1*}\Lambda(0) \to \mathrm{p}_\sharp\, \theta_{1*}\Lambda(0)$ en prenant la composition de

$$\mathrm{q}_\sharp \delta_{1*}\Lambda(0) \simeq \mathrm{p}_\sharp\, \mathrm{r}_\sharp\, \mathrm{r}^*\, \theta_{1*}\Lambda(0) \xrightarrow{\delta} \mathrm{p}_\sharp\, \theta_{1*}\Lambda(0).$$

En appliquant la réalisation de Betti et en utilisant la proposition 2.15, on déduit un morphisme canonique $\mathcal{L} \to \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$. Il s'agit d'un morphisme de $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)$-modules qui, par le corollaire 2.16, factorise le morphisme évident $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda) \to \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$. On en déduit aussitôt un morphisme d'algèbres commutatives $\widehat{\mathcal{L}} \to \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$. Le résultat suivant termine la preuve du théorème 2.14.

Lemme 2.17. *Le morphisme* $\widehat{\mathcal{L}} \to \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$ *est inversible.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, considérons l'espace cosimplicial $\mathcal{R}^{\mathrm{an}}_1(-, n)$. En prenant terme à terme le complexes des cochaines singulières, on obtient un objet simplicial $\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{R}^{\mathrm{an}}_1(-, n), \Lambda)$ de la catégorie des complexes de Λ-modules. L'algèbre $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$ est la colimite suivant $n \in \mathbb{N}^\times$ des complexes $\mathcal{K}_n = \mathrm{Tot}(\mathrm{N}(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{R}^{\mathrm{an}}_1(-, n), \Lambda)))$. Ci-dessus, $\mathrm{N}(-)$ désigne le complexe normalisé associé à un objet simplicial à valeurs dans une catégorie additive. Pour $\underline{\mathbf{m}} \in \mathbf{\Delta}$, le complexe $\mathrm{N}(\mathrm{C}^*(\mathcal{R}^{\mathrm{an}}_1(\underline{\mathbf{m}}, n), \Lambda))$ est le conoyau de

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{pr}_i^* : \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{C}^*(\mu_n(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^{m-1}) \to \mathrm{C}^*(\mu_n(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^{m})$$

avec pr_i la projection sur le i-ième facteur. On en déduit que la cohomologie de $\mathrm{N}(\mathrm{C}^*(\mathcal{R}^{\mathrm{an}}_1(\underline{\mathbf{m}}, n), \Lambda))$ est nulle sauf en degré m où c'est un $\hom(\mu_n(\mathbb{C}), \Lambda)$-module libre de rang 1. En utilisant une suite spectrale, on deduit que la cohomologie de $\mathcal{K}_n$ est nulle sauf en degré zéro. De plus, $\mathrm{H}^0(\mathcal{K}_n)$ admet une filtration croissante et exhaustive $\mathcal{F}$ dont le gradué est, en chaque degré positif, libre de rang 1 sur $\hom(\mu_n(\mathbb{C}), \Lambda)$. Par ailleurs, il est facile de voir que le morphisme

$$\mathcal{L}_n = \underset{\lrcorner}{\mathrm{hocolim}}(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{C}^{\mathrm{an}}_1(-, n), \Lambda)) \to \mathrm{Tot}(\mathrm{N}(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{R}^{\mathrm{an}}_1(-, n), \Lambda))) = \mathcal{K}_n$$

induit un isomorphisme entre $\mathcal{L}_n \simeq \mathcal{F}_1\mathrm{H}_0(\mathcal{K}_n)$. Ceci entraîne aussitôt que le morphisme de l'énoncé est surjectif. Pour vérifier l'injectivité, on peut considérer le cas universel $\Lambda = \mathbb{Z}$. Puisque $\widehat{\mathcal{L}}$ est sans torsion, on se ramène aussitôt au cas où $\Lambda = \mathbb{Q}$. Par le lemme 2.13 (c), $\widehat{\mathcal{L}}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes en une variable sur $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)$. Il en est de même de $\mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}^\times} \mathrm{H}_0(\mathcal{K}_n) \simeq \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$. Le résultat est maintenant clair. □

L'isomorphisme du théorème 2.14 induit une structure d'algèbre de Hopf sur $\widehat{\mathcal{L}}$.

Proposition 2.18. *Le morphisme canonique* $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda) \to \widehat{\mathcal{L}}$ *est un morphisme d'algèbres de Hopf. La comultiplication de* $\widehat{\mathcal{L}}$ *envoie la classe de* $\gamma_{1,0}$ *sur celle de* $\gamma_{1,0}\otimes 1+1\otimes\gamma_{1,0}$*. La counité de* $\widehat{\mathcal{L}}$ *envoie la classe de* $\alpha_{e,0}$ *sur* 1 *et les classes de* $\alpha_{e,r}$ *(pour* $0 < r < e$*) et* $\gamma_{e,s}$ *(pour* $0 \leq s < e$*) sur* 0.

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de montrer que

$$\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda) \to \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$$

est un morphisme de bialgèbres. On ne restreint pas la généralité en supposant que $\tilde{k}$ est algébriquement clos. Notons $\mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Sm}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ formée des revêtements étales de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ (i.e., des sommes disjointes finies de copies de $(-)^n : \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \to \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$).

Considérons la catégorie $\mathbf{PSh}(\mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda)$ des préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$. On dispose d'un foncteur fibre $1^* : \mathbf{PSh}(\mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda) \to \mathrm{Mod}(\Lambda)$ et $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)$ est la bialgèbre associée. D'autre part, l'inclusion $\iota : \mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \subset \mathsf{Sm}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ induit un foncteur $\iota^* : \mathbf{PSh}(\mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda) \to \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda)$. On en déduit un foncteur de $\mathbf{PSh}(\mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda)$ dans $\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}})$ dont l'image est contenue dans $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. De plus, on a un carré commutatif à un isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{PSh}(\mathsf{Rv}/\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda) \arrow[r, "1^*"] \arrow[d, "\iota^*"] & \mathrm{Mod}(\Lambda) \arrow[d, "(-)_{\mathrm{cst}}"] \\ \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda) \arrow[r, "1^*"] & \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda). \end{tikzcd}$$

Ainsi, la proposition 1.48 de [5] fournit un morphisme de bialgèbres $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda)_{\mathrm{cst}} \to 1^*\mathcal{U}$. En appliquant la réalisation de Betti, on obtient un morphisme de bialgèbres

$$\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda) \to \mathsf{Bti}^*_{\hat{k}}(1^*\mathcal{U}).$$

On laissera au lecteur le soin de vérifier que ce morphisme coïncide avec celui induit par $(\mathcal{R}_1, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^{\times}) \to (\mathcal{E}_1, \mathbb{N}^{\times})$. La counité de $1^*\mathcal{U}$ est le morphisme $1^*\mathcal{U} \to \Lambda(0)$ introduit dans la preuve de la proposition 2.10. On en déduit aussitôt que la counité de $\widehat{\mathcal{L}}$ restreinte à $\mathcal{L}$ coïncide, modulo l'isomorphisme $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(\mathrm{q}_\sharp \delta_{1*}\Lambda(0)) \simeq \mathcal{L}$ de la proposition 2.15, avec la réalisation de Betti du morphisme $\mathrm{q}_\sharp\delta_{1*}\Lambda(0) \to \Lambda(0)$ induit par le morphisme de diagrammes de schémas $1 : (\mathrm{Spec}(k), \lrcorner \times \mathbb{N}^{\times}) \to (\mathcal{C}_1, \lrcorner \times \mathbb{N}^{\times})$. La propriété recherchée découle maintenant de la preuve de la proposition 2.15.

Pour terminer, il nous reste à décrire l'action de la comultiplication de $\widehat{\mathcal{L}}$ sur la classe de $\gamma_{1,0}$. Pour cela, il suffit de voir que $\Lambda[\gamma_{1,0}] \subset \widehat{\mathcal{L}}$ est une sous-algèbre de Hopf de $\widehat{\mathcal{L}}$. (En effet, il y a une et une seule manière de munir $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ d'une structure de $\mathbb{Z}$-schéma en groupe ayant la section nulle pour unité.) Considérons la plus petite sous-catégorie triangulée $\mathbf{UDA}(\tilde{k}, \Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda)$ stable par sommes infinies et contenant l'image du foncteur $q^* : \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda) \to \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda)$ (avec q la projection structurale de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$). Clairement, $\mathbf{UDA}(\tilde{k}, \Lambda) \subset \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. La preuve de la proposition 2.10 montre que la restriction de $1^* : \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}, \Lambda) \to \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda)$ à $\mathbf{UDA}(\tilde{k}, \Lambda)$ admet un adjoint à droite donné par $\mathcal{A} \otimes q^*(-)$ avec $\mathcal{A} = \mathrm{p}(-,1)_\sharp \theta(-,1)_*\Lambda(0)$. Bien entendu, $(\theta(-,1), \mathrm{p}(-,1))$ est la projection structurale du diagramme de $\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$-schémas $(\mathcal{R}(-,1), \mathbf{\Delta})$. Ainsi, la proposition 1.48 de [5] fournit un morphisme d'algèbres de Hopf $1^*\mathcal{A} \to 1^*\mathcal{U}$. La preuve du lemme 2.17 montre que l'image de $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{A}) \to \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U})$ coïncide avec $\Lambda[\gamma_{1,0}]$ modulo l'isomorphisme du théorème 2.14. □

Corollaire 2.19. *Supposons que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Alors, le pro-schéma en groupe* $\mathrm{Spec}(\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}(1^*\mathcal{U}))$ *est canoniquement isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}(1) \times_\Lambda \mathbb{G}\mathrm{a}_\Lambda$, où $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ est considéré comme un pro-schéma en groupe constant au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\Lambda)$.

Démonstration. En effet, si $\mathbb{Q} \subset \Lambda$, le lemme 2.13 (c) fournit un isomorphisme $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}(1), \Lambda) \otimes_\Lambda \Lambda[\gamma_{1,0}] \simeq \widehat{\mathcal{L}}$. □

2.2.2. Application à l'algèbre de Hopf motivique d'un corps de fonctions d'une courbe. On garde les notations précédentes. On supposera que k est une extension finie de $\tilde{k}(\pi)$, pour $\pi \in k^\vee$ une uniformisante de v, que $\tilde{\sigma} = \sigma_{|\tilde{k}}$ et que $\mathbb{C}$ contient des éléments transcendants sur $\sigma(k)$. Sous ces conditions, on peut démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.20. *Il existe des isomorphismes (non canoniques) de foncteurs monoïdaux* $\mathsf{Bti}^* \simeq \mathsf{RigBti}^* \circ \mathsf{Rig}^*$ *avec* $\mathsf{Bti}^* : \mathbf{DA}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ *le foncteur de réalisation de Betti associé à* σ, $\mathsf{Rig}^* : \mathbf{DA}(k,\Lambda) \to \mathbf{RigDA}(\hat{k},\Lambda)$ *le foncteur de réalisation rigide et* $\mathsf{RigBti}^* : \mathbf{RigDA}(\hat{k},\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ *le foncteur de réalisation de Betti associé à* $\tilde{\sigma}$.

Démonstration. Le foncteur composé $\mathsf{RigBti}^* \circ \mathsf{Rig}^*$ est égal à la composition de (31)

$$\mathbf{DA}(k,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} \mathbf{RigDA}(\hat{k},\Lambda) \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathbf{QUDA}(\tilde{k},\Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}},\Lambda) \xrightarrow{1^*} \mathbf{DA}(\tilde{k}) \xrightarrow{\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}}} \mathbf{D}(\Lambda).$$

D'après [3, scholie 1.3.26], la composition des quatre premiers foncteurs dans (31) est canoniquement isomorphe au foncteur « motif proche » $\Psi_\pi : \mathbf{DA}(k,\Lambda) \to \mathbf{DA}(\tilde{k},\Lambda)$ défini dans [2, définition 3.5.6]. Il s'agit donc de construire un isomorphisme de foncteurs monoïdaux entre Bti^* et $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} \circ \Psi_\pi$.

Soit $A \subset k^\circ$ une sous-$\tilde{k}[\pi]$-algèbre étale telle que $A/\pi \simeq \tilde{k}$ et $\mathrm{Frac}(A) = k$. On note $C = \mathrm{Spec}(A)$, $c : C \to \mathbb{A}^1_{\tilde{k}}$ et $t : \mathrm{Spec}(k^\circ) \to C$ les morphismes canoniques de sorte que $\pi = c \circ t$. On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "t_\eta"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi_\eta"'] & \mathrm{Spec}(k^\circ) \arrow[d, "t"] & \mathrm{Spec}(\tilde{k}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, equal] \\
C_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "c_\eta"] & C \arrow[d, "c"] & \mathrm{Spec}(\tilde{k}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \arrow[r, "j"] & \mathbb{A}^1_{\tilde{k}} & \mathrm{Spec}(\tilde{k}). \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

On a alors un foncteur « motif proche » $\Psi_c : \mathbf{DA}(C,\Lambda) \to \mathbf{DA}(\tilde{k}, I)$ et un isomorphisme canonique $\Psi_c \circ t_{\eta *} \simeq \Psi_\pi$. On en déduit que $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} \circ \Psi_\pi \simeq \mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} \circ \Psi_c \circ t_{\eta *}$. Par ailleurs, la counité de l'adjonction $(t^*_\eta, t_{\eta *})$ est inversible. On en déduit un isomorphisme $\mathsf{Bti}^* \simeq \mathsf{Bti}^* t^*_\eta t_{\eta *}$. On est ainsi ramené à construire un isomorphisme entre $\mathsf{Bti}^* \circ t^*_\eta$ et $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} \circ \Psi_c$. Étant donné que ces foncteurs commutent aux sommes infinies, il suffit de construire un morphisme de foncteurs monoïdaux $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} \circ \Psi_c \to \mathsf{Bti}^* \circ t^*_\eta$ qui soit inversible après évaluation sur les objets compacts de $\mathbf{DA}(C_\eta,\Lambda)$.

Par [4, proposition 4.8, théorème 4.9], on dispose d'une transformation naturelle $\mathsf{Bti}^*_{\tilde{k}} \circ \Psi_c \to \Psi_{c^{\mathrm{an}}} \circ \mathsf{Bti}^*_{C_\eta}$ qui est inversible après évaluation sur les objets compacts de $\mathbf{DA}(C_\eta,\Lambda)$. D'autre part, si on note $z \in C^{\mathrm{an}}_\eta = C_\eta(\mathbb{C})$ le point donné par la composition de $A \hookrightarrow k \hookrightarrow \mathbb{C}$, on a un isomorphisme évident $\mathsf{Bti}^* \circ t^*_\eta \simeq z^* \circ \mathsf{Bti}^*_{C_\eta}$. Ainsi, pour terminer la preuve de la proposition, il suffira de construire un morphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux $\Psi_{c^{\mathrm{an}}} \circ \mathsf{Bti}^*_{C_\eta} \to z^* \circ \mathsf{Bti}^*_{C_\eta}$ qui soit inversible après évaluation sur les objets compacts de $\mathbf{DA}(C_\eta,\Lambda)$.

Notons $o \in C^{\mathrm{an}}$ l'image inverse de 0 par c^{an}. D'après le lemme 2.21 ci-dessous, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to C^{\mathrm{an}}$ reliant le point o au point z et tel que $\gamma(]0,1[) \cap C(\sigma(\overline{k})) = \emptyset$, i.e., tel que γ ne passe par aucun point à coordonnées algébriques sur $\sigma(k)$, mis à part o et z. Notons $\mathbf{D}_{\gamma-\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}_\eta,\Lambda))$ la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}_\eta,\Lambda))$ stable par sommes infinies et contenant les faisceaux constructibles sur C^{an}_η qui sont localement constants sur un voisinage de $\gamma(]0,1])$. Vu le choix de γ, il est clair que $\mathbf{D}_{\gamma-\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}_\eta,\Lambda))$ contient l'image du foncteur $\mathsf{Bti}^*_{C_\eta}$. Il suffit donc de construire une transformation naturelle de foncteurs pseudo-monoïdaux $(\Psi_{C^{\mathrm{an}}})_{|\mathbf{D}_{\gamma-\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}_\eta,\Lambda))} \to (z^*)_{|\mathbf{D}_{\gamma-\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}_\eta,\Lambda))}$ qui soit inversible après évaluation sur les faisceaux constructibles.

Pour cela, on doit revenir à la définition des foncteurs « cycles proches » dans le contexte analytique (cf. [7, exemple XIV]). Notons $E = \mathbb{C} \sqcup \{(-\infty)\}$ muni de la topologie caractérisée par :

1. $E - \{(-\infty)\}$ est un ouvert de E et l'identité de $\mathbb{C}$ sur $E - \{(-\infty)\}$ est un homéomorphisme.
2. Un système cofinal de voisinages ouverts de $(-\infty)$ est donné par

$$\{a \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(a) < -N\} \sqcup \{(-\infty)\}$$

avec $N \in \mathbb{N}$.

La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'étend en une application continue $\mathrm{r} : E \to \mathbb{C}$. On forme alors le diagramme

$$C^{\mathrm{an}}_\eta \xleftarrow{\mathrm{r}_\eta} (E - \{(-\infty)\}) \times_{\mathbb{C}-\{0\}} C^{\mathrm{an}}_\eta \xrightarrow{\bar{j}} E \times_{\mathbb{C}} C^{\mathrm{an}} \xleftarrow{\bar{i}} (o,-\infty)$$

et on pose $\Psi_{C^{\mathrm{an}}}(-) = \bar{i}^* \mathsf{R}\bar{j}_* \mathrm{r}^*(-)$. Soit $z' \in E \times_{\mathbb{C}} C^{\mathrm{an}}$ un antécédant de z. Puisque r_η est un revêtement topologique, il existe un unique relèvement $\gamma' :]0,1] \to E \times_{\mathbb{C}} C^{\mathrm{an}}$ de $\gamma_{|]0,1]}$ tel que $\gamma'(1) = z'$. On obtient un prolongement continue $\gamma' : [0,1] \to E \times_{\mathbb{C}} C^{\mathrm{an}}$ en posant $\gamma'(0) = (o,-\infty)$. On a donc un diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd}]0,1] \arrow[r, "\bar{\bar{j}}"] \arrow[d, "\gamma'_\eta"] & {[0,1]} \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \arrow[l, "\bar{\bar{i}}"'] \arrow[d, equal] \\ (E - \{(-\infty)\}) \times_{\mathbb{C}-\{0\}} C^{\mathrm{an}}_\eta \arrow[r, "\bar{j}"] & E \times_{\mathbb{C}} C^{\mathrm{an}} & (o,-\infty). \arrow[l, "\bar{i}"'] \end{tikzcd}$$

Ceci fournit une transformation naturelle

$$\bar{i}^* \bar{j}_* \mathrm{r}^*_\eta \to \bar{\bar{i}}^* \bar{\bar{j}}_* \gamma'^*_\eta \mathrm{r}^*_\eta \simeq \bar{\bar{i}}^* \bar{\bar{j}}_* \gamma^*_\eta.$$

Or, le foncteur γ^*_η envoie $\mathbf{D}_{\gamma-\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}_\eta,\Lambda))$ dans la sous-catégorie $\mathbf{D}_{\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(]0,1],\Lambda))$ définie comme étant la plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies et contenant les faisceaux localement constants. Puisque $]0,1]$ est contractile, on a une équivalence de catégories $(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(]0,1],\Lambda))$ qui est un quasi-inverse à 1^* et $\bar{\bar{i}}^* \bar{\bar{j}}_* : \mathbf{D}_{\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(]0,1],\Lambda)) \to \mathbf{D}(\Lambda)$. En particulier, ces deux foncteurs sont canoniquement isomorphes. Ceci fournit des transformations naturelles en $F \in \mathbf{D}_{\gamma-\mathrm{lc}}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}_\eta,\Lambda))$:

$$\Psi_{C^{\mathrm{an}}}(F) = \bar{i}^* \bar{j}_* \mathrm{r}^*_\eta(F) \to \bar{\bar{i}}^* \bar{\bar{j}}_* \gamma^*_\eta(M) \simeq 1^* \gamma^*_\eta(F) \simeq z^*(F).$$

Enfin, il est facile de voir que la flèche du milieu est inversible si F est un faisceau constant au voisinage de $\gamma(]0,1])$. □

Lemme 2.21. *Soit $K \subsetneq \mathbb{C}$ un sous-corps algébriquement clos et C une courbe lisse définie sur K. Soient $x_0, x_1 \in C(K)$ deux points. Il existe alors un chemin $\gamma : [0,1] \to C^{\mathrm{an}}$ joignant x_0 à x_1 (i.e., $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$) et tel que $\gamma(]0,1[) \cap C(K) = \emptyset$.*

Démonstration. La preuve est standard et sera omise. □

Lemme 2.22. *L'hypothèse* 2.6 *est vérifiée avec* $\mathcal{M}_1 = \mathbf{DA}(k, \Lambda)$, $\mathcal{M}_2 = \mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda)$, $\mathcal{E} = \mathbf{D}(\Lambda)$, $k = \mathsf{Rig}^*$, $f_1 = \mathsf{Bti}^*$ *et* $f_2 = \mathsf{RigBti}^*$.

Démonstration. On prendra pour s la composition de

$$\mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda) \simeq \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{DA}(k, \Lambda).$$

Les morphismes de coprojection

$$c_d : g_i(A) \otimes B \to g_i(A \otimes f_i(B)) \quad \text{et} \quad c_d : l(C) \otimes D \to l(C \otimes k(D))$$

sont inversibles. En effet, par le lemme 2.11 (en fait, sa preuve), il reste à montrer que $\mathsf{Rig}_*(M) \otimes N \to \mathsf{Rig}_*(M \otimes \mathsf{Rig}^*(N))$ est un isomorphisme pour tout $M \in \mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda)$ et $N \in \mathbf{DA}(k, \Lambda)$. Étant donné que les foncteurs Rig^* et Rig_* commutent aux sommes infinies, on peut supposer que N est compact et donc fortement dualisable. On utilise maintenant le lemme 2.8 de [5] pour conclure. □

On pose $\mathcal{H}_{\mathrm{rig}}(k, \upsilon, \Lambda) = \mathsf{Rig}^*\mathsf{Rig}_*\Lambda(0)$. C'est une algèbre de Hopf de la catégorie $\mathbf{RigDA}(\hat{k}, \Lambda)$.

Théorème 2.23. *Le choix d'un isomorphisme de foncteurs monoïdaux symétriques* $\mathsf{Bti}^* \simeq \mathsf{RigBti}^*\mathsf{Rig}^*$ *fournit une décomposition en produit tensoriel semi-direct*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \simeq \mathsf{RigBti}^*(\mathcal{H}_{\mathrm{rig}}(k, \upsilon, \Lambda)) \circledast \mathcal{H}^{\upsilon}_{\mathrm{mot}}(\hat{k}, \tilde{\sigma}, \Lambda).$$

Cette décomposition est indépendante du choix de l'isomorphisme $\mathsf{Bti}^* \simeq \mathsf{RigBti}^*\mathsf{Rig}^*$ *à conjugaison près par un élément de* $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)(\mathbb{Q})$.

Démonstration. La première assertion découle du théorème 2.7 et la seconde découle du lemme 2.24 ci-dessous. □

Lemme 2.24. *Avec les notations et les hypothèses de la section* 1.4 *de* [5], *soit* $\alpha : f \xrightarrow{\sim} f$ *un automorphisme de foncteurs monoïdaux symétriques et notons* $\beta : g \xrightarrow{\sim} g$ *l'inverse de l'automorphisme déduit par adjonction. On suppose que* $\alpha : f \circ e \xrightarrow{\sim} f \circ e$ *est l'identité de l'endofoncteur* $f \circ e$. *Alors* $\alpha \circ \beta : fg\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} fg\mathbb{1}$ *est un automorphisme d'algèbres de Hopf qui coïncide avec l'automorphisme intérieur associé à* $x : fg\mathbb{1} \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha}} fg\mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{cu}} \mathbb{1}$.

Démonstration. Le fait que $\alpha \circ \beta : fg\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} fg\mathbb{1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf découle de la proposition 1.48 (a) de [5]. Ceci démontre la première partie de l'énoncé. On remarque ensuite que l'isomorphisme $\alpha : fg\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} fg\mathbb{1}$ coïncide avec la comultiplication à gauche par x (cf. proposition 1.32 de [5]). Il reste donc à vérifier que le morphisme $\beta : fg\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} fg\mathbb{1}$ est la comultiplication à droite par x^{-1}. Or, ce dernier est un morphisme de $(fg\mathbb{1})$-comodules à gauche. C'est donc la comultiplication à droite par $y : fg\mathbb{1} \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta}} fg\mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{cu}} \mathbb{1}$. En utilisant que $\alpha \circ \beta$ est un morphisme de bialgèbres, on obtient que la composition de $fg\mathbb{1} \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha}} fg\mathbb{1} \xrightarrow{y} \mathbb{1}$ est la counité de $fg\mathbb{1}$. Ceci entraîne que $y = x^{-1}$ dans le groupe des morphismes d'algèbres unitaires de $fg\mathbb{1}$ dans $\mathbb{1}$. □

2.3. Groupes de Galois motiviques relatifs. Soient k un corps de caractéristique nulle, K/k une extension de corps et $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe. Le plongement $\sigma_{|k}$ sera désigné par σ lorsque cela n'entraîne pas de confusion. On dispose de deux foncteurs de réalisation de Betti $\mathsf{Bti}_k^* : \mathbf{DA}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ et $\mathsf{Bti}_K^* : \mathbf{DA}(K,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$. De plus, on a un isomorphisme canonique $\mathsf{Bti}_K^* \circ (K/k)^* \simeq \mathsf{Bti}_k^*$ avec $(K/k)^*$ le foncteur de pullback suivant $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$. On déduit de la proposition 1.48 de [5] un morphisme d'algèbres de Hopf $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$ et donc aussi, par application de $\mathrm{Spec}(\mathrm{H}_0(-))$, un morphisme de pro-schémas en groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$.

Définition 2.25. On note $\mathbf{G}_{/k}^{\mathrm{rel}}(K,\sigma,\Lambda)$, le noyau du morphisme

$$\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda).$$

C'est le *groupe de Galois motivique relatif* de l'extension K/k.

Remarque 2.26. On peut faire mieux et définir une algèbre de Hopf motivique relative dans la catégorie des Λ-modules $\mathbb{Z}$-gradués. En effet, on sait que l'homologie de $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(-,\sigma,\mathbb{Z})$ est sans torsion, et donc plate sur $\mathbb{Z}$. Il en est donc de même de l'homologie de $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(-,\sigma,\Lambda)$. En particulier, on peut munir $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(-,\sigma,\Lambda))$ d'une structure de Λ-algèbre de Hopf graduée. On définit alors la Λ-algèbre de Hopf graduée

$$\mathscr{H}_{/k}^{\mathrm{rel}}(K,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{gr}} = \Big(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda))\Big) \otimes_{(\oplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)))} \Lambda,$$

où Λ est considéré comme un $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda))$-module à l'aide du morphisme de counité. On verra plus tard (cf. théorème 2.55) que $\mathscr{H}_{/k}^{\mathrm{rel}}(K,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{gr}}$ est concentrée en degré zéro.

On aura besoin du lemme technique suivant.

Lemme 2.27. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T*-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur* Sm/K. *On suppose que* $\mathbf{E}$ *est stablement projectivement* $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$*-fibrant. Alors, le morphisme évident*

$$\operatorname*{colim}_{k\subset l\subset K} (K/l)^*(K/l)_*\mathbf{E} \to \mathbf{E}, \tag{32}$$

où l/k *parcours les sous-extensions de type fini de* K/k*, est une équivalence stable* $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$*-locale.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout objet compact $M \in \mathbf{DA}(K,\Lambda)$, on obtient un isomorphisme en appliquant $\hom_{\mathbf{DA}(K,\Lambda)}(M,-)$ à (32). Or, d'après [3, corollaire 1.A.3], M est « défini » sur une extension de type finie l/k, i.e., il existe un motif compact $M_0 \in \mathbf{DA}(l,\Lambda)$ tel que $M \simeq (K/l)^*M_0$. On ne restreint pas la généralité en supposant que $l = k$. On a alors une chaîne d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}
&\hom_{\mathbf{DA}(K,\Lambda)}\big((K/k)^*M_0, \operatorname*{colim}_{k\subset l\subset K} (K/l)^*(K/l)_*\mathbf{E}\big)\\
&\simeq \operatorname*{colim}_{k\subset l\subset K} \hom_{\mathbf{DA}(K,\Lambda)}\big((K/k)^*M_0, (K/l)^*(K/l)_*\mathbf{E}\big)\\
&\simeq \operatorname*{colim}_{k\subset l\subset K} \operatorname*{colim}_{l\subset l'\subset K} \hom_{\mathbf{DA}(l',\Lambda)}\big((l'/k)^*M_0, (l'/l)^*(K/l)_*\mathbf{E}\big)
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\simeq \operatorname*{colim}_{k\subset l\subset K} \hom_{\mathbf{DA}(l,\Lambda)}\big((l/k)^* M_0, (K/l)_*\mathbf{E}\big)$$
$$\simeq \operatorname*{colim}_{k\subset l\subset K} \hom_{\mathbf{DA}(K,\Lambda)}\big((K/l)^*(l/k)^* M_0, \mathbf{E}\big) \simeq \hom_{\mathbf{DA}(K,\Lambda)}(M, \mathbf{E}).$$

Ci-dessus, le second isomorphisme est celui de [3, proposition 1.A.1] et le troisième est induit par le foncteur final qui à une sous-extension de type fini $l/k \subset K/k$ associe le couple de sous-extensions de type fini $(l/k, l/l)$. Le lecteur vérifiera facilement que la composition de (33) est égale au morphisme canonique induit par (32). □

Proposition 2.28. *L'homologie de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$ est isomorphe canoniquement à la colimite filtrante de l'homologie des $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(l,\sigma,\Lambda)$, où l/k parcours les sous-extensions de type finie de K/k.*

Démonstration. Vu le lemme 2.27, on a une chaîne d'isomorphismes naturels

$$\mathsf{Bti}_K^*\mathsf{Bti}_{K*}\Lambda \simeq \operatorname*{hocolim}_{k\subset l\subset K} \mathsf{Bti}_K^*(K/l)^*(K/l)_*\mathsf{Bti}_{K*}\Lambda \simeq \operatorname*{hocolim}_{k\subset l\subset K} \mathsf{Bti}_l^*\mathsf{Bti}_{l*}\Lambda.$$

Les colimites homotopiques ci-dessus étant filtrantes, elles passent trivialement à l'homologie. □

Corollaire 2.29. *Le pro-schéma en groupe $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)$ est naturellement la limite projective des $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(l,\sigma,\Lambda)$, où l/k parcours les sous-extensions de type finie de K/k.*

Nous utiliserons le résultat suivant.

Lemme 2.30. *Soit l/k une extension algébrique galoisienne (non nécessairement finie) munie d'un plongement complexe $\sigma : l \hookrightarrow \mathbb{C}$ qui prolonge celui de k. On a alors une suite exacte d'algèbres de Hopf*

$$\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(l/k),\Lambda) \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)) \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(l,\sigma,\Lambda)). \tag{34}$$

Démonstration. Il s'agit de prouver que le premier morphisme est injectif, le second est surjectif, leur composition est égale à celle du morphisme de counité suivi du morphisme d'unité et, enfin, que (34) identifie $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(l,\sigma,\Lambda))$ au produit tensoriel

$$\Big(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(l,\sigma,\Lambda))\Big) \otimes_{\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(l/k),\Lambda)} \Lambda.$$

Vu la proposition 2.28, il suffit de traiter le cas où l/k est une extension finie de groupe de Galois G de sorte que $(l/k)^*(l/k)_*M \simeq \bigoplus_{g\in G} g^*M$ pour tout $M \in \mathbf{DA}(k,\Lambda)$. D'autre part, on a des isomorphismes canoniques $\mathsf{Bti}_l^* \circ (l/k)^* \simeq \mathsf{Bti}_k^*$ et $(l/k)_*\mathsf{Bti}_{l*} \simeq \mathsf{Bti}_{k_*}$. On en déduit une chaîne d'isomorphismes naturels :

$$\mathsf{Bti}_k^*\mathsf{Bti}_{k*}\Lambda \simeq \mathsf{Bti}_l^*(l/k)^*(l/k)_*\mathsf{Bti}_{l*}\Lambda \simeq \bigoplus_{g\in G} \mathsf{Bti}_l^* g^*\mathsf{Bti}_{l*}\Lambda.$$

Il est facile de voir que modulo ces isomorphismes, la première flèche de (34) correspond à la somme directe, suivant $g \in G$, des morphismes unités des algèbres $\mathsf{Bti}_l^* g^*\mathsf{Bti}_{l*}\Lambda$, alors que la seconde flèche de (34) correspond à la projection sur le facteur indexé par $1 \in G$. Ceci entraîne toutes les propriétés à vérifier, sauf l'injectivité de la première flèche de (34). Pour montrer cette injectivité, on se ramène facilement au cas où Λ est de torsion. On a alors un isomorphisme canonique de Λ-algèbres $\mathcal{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \Lambda) \simeq \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ avec $\bar{k} \subset \mathbb{C}$ la clôture algébrique de k dans $\mathbb{C}$ (cf. théorème 1.25). Ceci entraîne immédiatement la propriété recherchée. □

Corollaire 2.31. *Soit l/k une extension algébrique galoisienne munie d'un plongement complexe $\sigma : l \hookrightarrow \mathbb{C}$ qui prolonge celui de k. On a alors une suite exacte de pro-schémas en groupe*

$$\{1\} \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(l, \sigma, \Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \to \mathrm{Gal}(l/k)_\Lambda \to \{1\},$$

où $\mathrm{Gal}(l/k)_\Lambda$ *est le groupe de Galois profini de l/k vue comme un pro-schéma en groupe constant sur* $\mathrm{Spec}(\Lambda)$.

Proposition 2.32. *On suppose donné un carré d'extensions de corps*

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & \longrightarrow & L \end{array}$$

ainsi qu'un plongement complexe $\sigma : L \hookrightarrow \mathbb{C}$. (On note encore σ la restriction de ce plongement à k, l et K.) On a alors un morphisme évident $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/l}(L, \sigma, \Lambda) \to \mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda)$ qui est inversible lorsque l'extension l/k est algébrique et que L est engendrée par K et l.

Démonstration. La construction du morphisme $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/l}(L, \sigma, \Lambda) \to \mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda)$ est immédiate à partir de la définition. On suppose donc que les extensions l/k et L/K sont algébriques et que L est engendrée par K et l. On ne restreint pas la généralité en supposant aussi que ces extensions sont galoisiennes. Le corollaire 2.31 fournit alors un morphisme de suites exactes de pro-schémas en groupe

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(L, \sigma, \Lambda) & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/K)_\Lambda & \longrightarrow & \{1\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(l, \sigma, \Lambda) & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(l/k)_\Lambda & \longrightarrow & \{1\}. \end{array}$$

Or, le morphisme $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(l/k)$ est injectif. On en déduit aussitôt que le morphisme induit entre les noyaux des deux premières flèches verticales est inversible. □

Remarque 2.33. On a aussi l'analogue de la proposition 2.32 pour les algèbres de Hopf motiviques relatives comme définies dans la remarque 2.26. Le lecteur n'aura aucune peine à adapter la preuve de la proposition 2.32 pour démontrer cela.

Théorème 2.34. *Supposons que l'extension K/k est de type fini et géométriquement connexe, i.e., k est sa clôture algébrique dans K. Alors, on a une suite exacte courte de pro-schémas en groupe*

$$\{1\} \to \mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \to \{1\}. \tag{35}$$

De plus, il existe une extension finie l/k, contenue dans $\mathbb{C}$, telle que la suite exacte correspondante pour l'extension L/l, avec L le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par $\sigma(K)$ et l, est scindée.

Le théorème 2.34 découle de l'énoncé plus précis suivant.

Proposition 2.35. *Supposons que l'extension K/k est de type fini et géométriquement connexe. On a alors les propriétés suivantes.*

(a) *Le morphisme $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$ est injectif sur l'homologie. Autrement dit,*

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)) \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)) \to \mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda) \tag{36}$$

est une suite exacte de Λ-algèbres de Hopf graduées.

(b) *Si l'extension K/k admet un modèle lisse contenant un k-point, alors il existe un isomorphisme de Λ-algèbres de Hopf graduées*

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)) \simeq \mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{gr}} \otimes \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda))$$

induisant un scindage de la suite exacte (36).

Démonstration. Montrons d'abord que (b) entraîne (a). En effet, par (b), on peut trouver une extension finie galoisienne l/k, contenue dans $\mathbb{C}$, telle que le morphisme $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(l,\sigma,\Lambda) \to \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(L,\sigma,\Lambda)$ est injectif sur l'homologie, avec $L = K \otimes_k l$ canoniquement plongé dans $\mathbb{C}$. Par ailleurs, on a un morphisme de suites exactes de Λ-algèbres de Hopf graduées (cf. lemme 2.30) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{C}^0(\mathrm{Gal}(l/k),\Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(l,\sigma,\Lambda)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{C}^0(\mathrm{Gal}(L/K),\Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(L,\sigma,\Lambda)).
\end{array}$$

Étant donné que l'extension K/k est géométriquement connexe, on a $\mathrm{Gal}(l/k) \simeq \mathrm{Gal}(L/K)$, et la flèche verticale à gauche dans le diagramme ci-dessus est un isomorphisme. Ceci prouve que la flèche verticale du milieu est injective.

On passe maintenant à la preuve de (b). Soit $A \subset K$ une sous-k-algèbre lisse de K telle que $K = \mathrm{Frac}(A)$ et soit $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal tel que $k \simeq A/\mathfrak{m}$. Notons n la dimension de Krull de A. Lorsque $n = 0$, on a $k = K$ et il n'y a rien à démontrer. Lorsque $n \geq 1$, on choisit une chaîne maximale d'idéaux premiers $(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{m}$ telle que $B_i = A/\mathfrak{p}_{i-1}$ est un domaine normal au voisinage de $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i-1} \in \mathrm{Spec}(B_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Autrement dit, $R_i = (B_i)_{\mathfrak{q}_i}$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{q}_i R_i$. On note $K_i = \mathrm{Frac}(R_i)$ et v_i sa valuation de sorte que $R_i = K_i^{\circ}$, $\mathfrak{q}_i R_i = K_i^{\vee}$ et $\tilde{K}_i = K_{i+1}$ (où l'on convient que $K_{n+1} = A/\mathfrak{m} \simeq k$). On fixe une uniformisante $\pi_i \in K_i^{\vee}$. Associés à cela, on a des foncteurs « motif proche » : $\Psi_{\pi_i} : \mathbf{DA}(K_i,\Lambda) \to \mathbf{DA}(K_{i+1},\Lambda)$. Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme de foncteurs monoïdaux

$$\mathsf{Bti}^*_K \simeq \mathsf{Bti}^*_k \circ \Psi_{\pi_n} \circ \cdots \circ \Psi_{\pi_1}. \tag{37}$$

Ceci terminera la preuve de la proposition. Expliquons comment : rappelons d'abord que Ψ_{π_i} coïncide avec la composition de

$$\begin{aligned}\mathbf{DA}(K_i,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} \mathbf{RigDA}(\hat{K}_i,\Lambda) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathfrak{R}}} \mathbf{QUDA}(K_{i+1},\Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_{K_{i+1}},\Lambda)& \\ \xrightarrow{1^*} \mathbf{DA}(K_{i+1},\Lambda).&\end{aligned}$$

et notons, comme avant, $\mathfrak{s}^* : \mathbf{RigDA}(\hat{K}_i, \Lambda) \to \mathbf{DA}(K_{i+1}, \Lambda)$ la composition des trois derniers foncteurs ci-dessus. Le foncteur Ψ_{π_n} possède donc un adjoint à droite, à savoir $\mathsf{Rig}_* \circ \mathfrak{s}_*$. Il en est donc de même du foncteur composé $\mathfrak{P}^* = \Psi_{\pi_n} \circ \cdots \circ \Psi_{\pi_1}$, et son adjoint à droite sera noté $\mathfrak{P}_*$. Par ailleurs, l'hypothèse 2.6 est vérifiée avec $\mathcal{M}_1 = \mathbf{DA}(K, \Lambda)$, $\mathcal{M}_2 = \mathbf{DA}(k, \Lambda)$, $\mathcal{E} = \mathbf{D}(\Lambda)$, $k = \mathfrak{P}^*$, $f_1 = \mathsf{Bti}_K^*$ et $f_2 = \mathsf{Bti}_k^*$. En effet, on peut prendre pour $s : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ le foncteur de changement de base $(K/k)^* : \mathbf{DA}(k, \Lambda) \to \mathbf{DA}(K, \Lambda)$ et les propriétés à vérifier sont immédiates. On peut donc appliquer le théorème 2.7 pour obtenir une décomposition en produit tensoriel semi-direct

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda) \simeq \mathsf{Bti}_k^*(\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0)) \circledtimes \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda). \tag{38}$$

De plus, le morphisme canonique $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda)$ correspond modulo (38) au morphisme induit par l'unité de l'algèbre de Hopf $\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0)$. Puisque le complexe de Λ-modules $\mathsf{Bti}_k^*(\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0))$ est isomorphe à un facteur direct de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda)$, son homologie est plate sur Λ. Ainsi, la décomposition (38) passe à l'homologie pour fournir un isomorphisme

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda)) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathsf{Bti}_k^*(\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0))) \circledtimes \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{H}_i(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)).$$

C'est la décomposition en produit tensoriel semi-direct recherchée.

Pour terminer la preuve, il reste à construire un isomorphisme (37). On ne restreint pas la généraltité en remplaçant K par le corps des fonction d'un voisinage étale de $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$. On peut donc supposer qu'il existe une chaîne d'inclusions $k = K_{n+1} \hookrightarrow K_n \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow K_1 = K$ telle que $K_{i+1} \hookrightarrow K_i$ se factorise par K_i° et induit une rétraction à $K_i^\circ \twoheadrightarrow K_{i+1}$. La proposition 2.20 fournit alors des isomorphismes $\mathsf{Bti}_{K_i}^* \simeq \mathsf{Bti}_{K_{i+1}}^* \circ \Psi_{\pi_i}$ où $\mathsf{Bti}_{K_i}^* : \mathbf{DA}(K_i, \Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ est la réalisation de Betti associée au plongement complexe composé $K_i \hookrightarrow K \hookrightarrow \mathbb{C}$. On obtient un isomorphisme du type (37) en composant ces isomorphismes. □

Remarque 2.36. Soit K/k une extension de type fini. On peut trouver une extension finie galoisienne l/k contenue dans $\mathbb{C}$ telle que l'extension L/l est géométriquement connexe et admet un modèle lisse contenant un l-point. (Bien entendu, $L \subset \mathbb{C}$ est le sous-corps engendré par $\sigma(K)$ et l.) La preuve de la proposition 2.35 fournit alors une algèbre de Hopf $\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0) \in \mathbf{DA}(l, \Lambda)$ telle que $\mathcal{H}_{/k}^{\mathrm{rel}}(K, \sigma, \Lambda)_{\mathrm{gr}}$ est isomorphe à l'homologie de sa réalisation de Betti $\mathsf{Bti}_l^*(\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0))$. Il est donc naturel de noter cette dernière $\mathcal{H}_{/k}^{\mathrm{rel}}(K, \sigma, \Lambda)$.

Supposons encore que l'extension K/k est de type fini et géométriquement connexe. La proposition 2.35 (b) montre que la suite exacte (35) est scindée si K/k admet un modèle lisse contenant un k-point. On peut se demander si la réciproque de cette propriété est vraie.

Question 2.37. Supposons que la suite exacte (35) est scindée avec $\Lambda = \mathbb{Z}$. Existe-t-il un modèle lisse de l'extension K/k contenant un k-point ?

C'est là une variante motivique et birationnelle de la conjecture des sections de Grothendieck [8]. Bien que la conjecture de Grothendieck n'est raisonnable que pour un corps de base k infini et de type fini sur son corps premier, on peut espérer une réponse positive à la question 2.37 pour tout corps de caractéristique nulle k (muni d'un plongement complexe).

Lorsque le degré de transcendance de K/k est 1, on peut poser une question plus précise. Pour cela, on aura besoin de quelques préliminaires. Soit υ une valuation de K telle que $k \subset K^\circ$ et $k \simeq \tilde{K}$. À une uniformisante $\pi \in K^\vee$, on associe le foncteur

$$\widetilde{\Psi}_\pi : \mathbf{DA}(K, \Lambda) \to \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda)$$

donné par la composition de

$$\mathbf{DA}(K, \Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathfrak{R}}} \mathbf{QUDA}(k, \Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda).$$

On a le résultat suivant.

Proposition 2.38. *Soient $\pi' \in K^\vee$ une autre uniformisante de la valuation υ et $a \in k^\times$ l'image de π'/π par $K^\circ \twoheadrightarrow \tilde{K} \simeq k$. On note encore $a : \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}} \to \mathbb{G}\mathrm{m}_{\tilde{k}}$ l'endomorphisme de multiplication par a. On a alors un isomorphisme canonique de foncteurs monoïdaux $\widetilde{\Psi}_\pi \simeq a^* \circ \widetilde{\Psi}_{\pi'}$.*

Démonstration. On note $\mathfrak{F}'$ la composition de

$$\mathbf{QUDA}(k, \Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda) \xrightarrow{\pi'^*} \mathbf{DA}(K, \Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda).$$

C'est une équivalence de catégories, et on en fixe un quasi-inverse $\mathfrak{R}'$. Alors, $\widetilde{\Psi}_{\pi'}$ est la composition de $\mathfrak{R}' \circ \mathsf{Rig}^*$ avec l'inclusion $\mathbf{QUDA}(k, \Lambda) \subset \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda)$. Or, il est clair que l'endofoncteur a^* de $\mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda)$ préserve la sous-catégorie $\mathbf{QUDA}(k, \Lambda)$. Il suffit donc de construire un isomorphisme $\mathfrak{R} \simeq a^* \circ \mathfrak{R}'$. D'une manière équivalente, on cherche à construire un isomorphisme de foncteurs monoïdaux $\mathfrak{F} \circ a^* \simeq \mathfrak{F}'$. Ce problème est transitif dans le sens que si ces isomorphismes sont construits pour des couples d'uniformisantes (π, π') et (π', π''), leur composition est l'isomorphisme correspondant pour (π, π''). On est donc ramené à traiter les deux cas particuliers suivants : celui où $\pi' = a\pi$ et celui où $a = 1$.

Cas 1. On suppose ici que $\pi' = a\pi$ avec $a \in k^\times$. On a alors un diagramme commutatif à isomorphismes près

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{QUDA}(k, \Lambda) & \subset & \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda) & \xrightarrow{\pi'^*} & \mathbf{DA}(K, \Lambda) & \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} & \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda) \\
\downarrow{\scriptstyle a^*} & & \downarrow{\scriptstyle a^*} & & \| & & \| \\
\mathbf{QUDA}(k, \Lambda) & \subset & \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathbf{DA}(K, \Lambda) & \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} & \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda).
\end{array}$$

Ceci fournit l'isomorphisme $\mathfrak{F} \circ a^* \simeq \mathfrak{F}'$ recherché.

Cas 2. On suppose ici que $a = 1$. Autrement dit, $\pi' = \pi(1 + \pi.b)$ avec $b \in K^\circ$. On cherche alors à montrer que les foncteurs $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont canoniquement isomorphes. Notons h_b l'unique automorphisme de l'extension $\hat{K}/k$ tel que $h_b(\pi) = \pi'$. On a alors des endofoncteurs de changement de base h_b^* des catégories $\mathbf{DA}(\hat{K}, \Lambda)$ et $\mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$ qui sont induits par les foncteurs $\dagger \rightsquigarrow \dagger \otimes_{\hat{K}, h_b} \hat{K}$ et $\dagger' \rightsquigarrow \dagger' \hat{\otimes}_{\hat{K}, h_b} \hat{K}$ avec $\dagger$ un $\hat{K}$-schéma et $\dagger'$ une $\hat{K}$-variété rigide. De plus, on a un diagramme commutatif à des isomorphismes canoniques près

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{QUDA}(k, \Lambda) & \subset & \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathbf{DA}(\hat{K}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} & \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda) \\
\| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle h_b^*} & & \downarrow{\scriptstyle h_b^*} \\
\mathbf{QUDA}(k, \Lambda) & \subset & \mathbf{DA}(\mathbb{G}\mathrm{m}_k, \Lambda) & \xrightarrow{\pi'^*} & \mathbf{DA}(\hat{K}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathsf{Rig}^*} & \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda).
\end{array}$$

Ainsi, pour terminer, il suffit de montrer que l'endofoncteur h_b^* de $\mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$ est naturellement isomorphe au foncteur identité. Ceci fera l'objet du lemme 2.39 ci-dessous. □

Lemme 2.39. *On fixe une uniformisante $\pi \in \hat{K}^\vee$. Pour $b \in \hat{K}^\circ$, on note h_b l'automorphisme de l'extension $\hat{K}/k$ tel que $h_b(\pi) = \pi \cdot (1 + \pi \cdot b)$. Alors, l'endofoncteur $h_b^* : \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda) \to \mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$ est naturellement isomorphe au foncteur identité.*

Démonstration. Soit $h : \hat{K}\{t\} \to \hat{K}\{t\}$ l'automorphisme continu d'anneaux topologiques tel que $h(\pi) = \pi \cdot (1 + \pi \cdot t)$ et $h(P) = P$ pour tout $P \in k[t]$. On fera attention que h n'est pas un morphisme de $\hat{K}$-algèbres mais un morphisme de $k[t]$-algèbres. On peut construire l'automorphisme h de la manière suivante. Considérons le morphisme de k-algèbres $g : k[\pi, t] \to k[\pi, t, (1 + \pi \cdot t)^{-1}]$ défini par $g(t) = t$ et $g(\pi) = \pi \cdot (1 + \pi \cdot t)$ et notons $i : k[\pi, t] \to k[\pi, t, (1 + \pi \cdot t)^{-1}]$ l'inclusion évidente. En complétant suivant les puissances des idéaux engendrés par π, on obtient deux morphismes d'anneaux topologiques $\hat{g} : k[\pi, t]/\!\!/(\pi) \to k[\pi, t, (1 + \pi \cdot t)^{-1}]/\!\!/(\pi)$ et $\hat{i} : k[\pi, t]/\!\!/(\pi) \hookrightarrow k[\pi, t, (1 + \pi \cdot t)^{-1}]/\!\!/(\pi)$. Clairement, $\hat{i}$ est inversible et on prend pour h l'endomorphisme induit de $\hat{i}^{-1} \circ \hat{g}$ sur l'anneau $\{k[\pi, t]/\!\!/(\pi)\}_\pi$.

Si A est une $\hat{K}$-algèbre affinoïde, on pose $\mathrm{H}(A) = A\{t\} \hat{\otimes}_{\hat{K}\{t\}, h} \hat{K}\{t\}$. On a un morphisme naturel $\hat{K}\{t\} \to \mathrm{H}(A)$ donné par $f \rightsquigarrow 1 \otimes f$. En particulier, $\mathrm{H}(A)$ est une $\hat{K}\{t\}$-algèbre. Si $A = \hat{K}\{t_1, \ldots, t_n\}/(f_1, \ldots, f_n)$, un calcul immédiat fournit un isomorphisme de $\hat{K}\{t\}$-algèbres $\mathrm{H}(A) \simeq \hat{K}\{t, t_1, \ldots, t_n\}/(h(f_1), \ldots, h(f_m))$. Ceci montre que $\mathrm{H}(A)$ est une $\hat{K}$-algèbre affinoïde pour toute $\hat{K}$-algèbre affinoïde A. De plus, pour tout $b \in \hat{K}^\circ$, l'évaluation de t en b fournit un morphisme canonique surjectif $\mathrm{H}(A) \twoheadrightarrow A \hat{\otimes}_{\hat{K}, h_b} \hat{K}$.

Notons encore H l'endofoncteur de $\mathsf{SmAfnd}/\hat{K}$, la catégorie de $\hat{K}$-affinoïdes lisses, tel que $\mathrm{H}(\mathrm{Spm}(A)) = \mathrm{Spm}(\mathrm{H}(A))$ pour toute $\hat{K}$-algèbre affinoïde A. Si X est un $\hat{K}$-affinoïde lisse, on a une immersion fermée naturelle $s_b : X \hat{\otimes}_{\hat{K}, h_b} \hat{K} \hookrightarrow \mathrm{H}(X)$ donnée par l'évaluation de t en $b \in \hat{K}^\circ$. Autrement dit, s_b s'identifie à l'inclusion de la fibre en $b \in \mathbb{B}^1_{\hat{K}}(\hat{K})$ du morphisme $\mathrm{H}(X) \to \mathbb{B}^1_{\hat{K}}$. L'endofoncteur H est continu pour la topologie de Nisnevich sur $\mathsf{SmAfnd}/\hat{K}$ et les conditions d'application de [2, théorème 4.4.60] sont satisfaites. On en déduit donc une adjonction de Quillen $(\mathrm{H}^*, \mathrm{H}_*)$ sur la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{SmAfnd}/\hat{K}, \Lambda))$ munie de sa structure de modèles projective Nis-locale. Vu l'isomorphisme canonique $\mathrm{H}(\mathbb{B}^1_X) \simeq \mathbb{B}^1_{\mathrm{H}(X)}$, cette adjonction de Quillen passe à la localisation de Bousfield suivant les morphismes $\mathbb{B}^1_\dagger \otimes \Lambda[n] \to \dagger \otimes \Lambda[n]$ (avec $\dagger$ un $\hat{K}$-affinoïde lisse et $n \in \mathbb{Z}$). Autrement dit, $(\mathrm{H}^*, \mathrm{H}_*)$ est aussi une adjonction de Quillen relativement à la structure $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale. Enfin, vu l'isomorphisme $\mathrm{H}(\partial\mathbb{B}^1_X) \simeq \partial\mathbb{B}^1_{\mathrm{H}(X)}$, cette adjonction se prolonge à la catégorie des T^{rig}-spectres symétriques avec $T^{\mathrm{rig}} = (\partial\mathbb{B}^1_{\hat{K}}, 1) \otimes \Lambda$. On obtient ainsi une adjonction de Quillen $(\mathrm{H}^*, \mathrm{H}_*)$ sur la catégorie $\mathbf{Spt}^\Sigma_{T^{\mathrm{rig}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{SmAfnd}/\hat{K}, \Lambda)))$ munie de sa structure de modèles projective $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale stable. On obtient au final un endofoncteur triangulé LH^* de la catégorie $\mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$.

D'autre part, pour $b \in \hat{K}^\circ$, la transformation naturelle $s_b : (-) \hat{\otimes}_{\hat{K}, h_b} \hat{K} \to \mathrm{H}(-)$ fournit une transformation naturelle $s_b^* : \mathsf{L}h_b^* \to \mathsf{LH}^*$ entre endofoncteurs de $\mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$. On montrera que cette transformation naturelle est inversible pour tout $b \in \hat{K}^\circ$. Vu que $\mathsf{L}h_0^*$ est le foncteur identité, ceci terminera la preuve du lemme.

Pour montrer que la transformation naturelle $s_b^* : \mathsf{L}h_b^* \to \mathsf{LH}^*$ est inversible, il suffit de le faire après évaluation sur un système de générateurs de $\mathbf{RigDA}(\hat{K}, \Lambda)$. Un tel système est donné par les twists de Tate des motifs rigides des $\hat{K}$-affinoïdes $Q_r^{\mathrm{rig}}(X, f)$ avec $r \in \mathbb{N}-\{0\}$, X un k-schéma affine et lisse, et $f \in \mathcal{O}^{\times}(X)$. Supposons que $X = \mathrm{Spec}(A)$. Alors, $Q_r^{\mathrm{rig}}(X, f)$ est le spectre maximal de la $\hat{K}$-algèbre affinoïde $\{(A[v, \pi]/(v^r - f \cdot \pi))/\!\!/(\pi)\}_{\pi}$. Un calcul simple montre que $\mathrm{H}(Q_r^{\mathrm{rig}}(X, f))$ est le spectre maximal de le $\hat{K}$-algèbre affinoïde

$$\left\{(A[t, v, \pi]/(v^r - f \cdot \pi \cdot (1 + \pi \cdot t)))/\!\!/(\pi)\right\}_{\pi}.$$

En faisant le changement de variable $v = w \cdot \sqrt[r]{1 + \pi \cdot t}$, avec $\sqrt[r]{1 + \pi \cdot t}$ la série formelle de la forme $1 + r^{-1}\pi \cdot t + \cdots$ dont la puissance r-ième est $1 + \pi \cdot t$, on voit que $\mathrm{H}(Q_r^{\mathrm{rig}}(X, f))$ est isomorphe à $\mathbb{B}^1_{\hat{K}} \hat{\times}_{\hat{K}} Q_r^{\mathrm{rig}}(X, f)$ et que sa projection sur $\mathbb{B}^1_{\hat{K}}$ correspond à la projection sur le premier facteur. On en déduit que

$$s_b : [Q_r^{\mathrm{rig}}(X, f) \hat{\otimes}_{\hat{K}, h_b} \hat{K}] \otimes \Lambda \to [\mathrm{H}(Q_r^{\mathrm{rig}}(X, f))] \otimes \Lambda$$

est une équivalence $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$-locale. Le lemme est démontré. □

Notons C la k-courbe projective lisse (unique à un unique isomorphisme près) ayant K pour corps de fonctions. Un point fermé $x \in C$ définit une valuation υ de K telle que $K^{\circ} = \mathcal{O}_{C,x}$, $K^{\vee} = \mathfrak{m}_x$ et $\tilde{K} = k(x)$. L'espace tangent $\mathrm{T}_x(C)$ en x est le $k(x)$-schéma $\mathrm{Spec}(k(x)[\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2])$. En fait, $\mathrm{T}_x(C)$ est la fibre en $x \in C$ d'un fibré en droites $\mathrm{T}(C)$, le fibré tangent, défini par le spectre relatif de la $\mathcal{O}_C$-algèbre $\mathcal{O}_C[\Omega_{C/k}]$. On note $\mathrm{T}^*(C)$ (resp. $\mathrm{T}_x^*(C)$) le complémentaire de la section nulle dans $\mathrm{T}(C)$ (resp. $\mathrm{T}_x(C)$). Le choix d'une base u de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ fournit des isomorphismes canoniques $u : \mathrm{T}_x(C) \simeq \mathbb{A}^1_{k(x)}$ et $u : \mathrm{T}_x^*(C) \simeq \mathbb{G}\mathrm{m}_{k(x)}$.

Corollaire 2.40. *Supposons que $x \in C(k)$ est un k-point et soit $\pi \in \mathfrak{m}_x$ une uniformisante de la valuation υ associée. On note $\mathrm{d}_x\pi$ la classe de π dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Alors, le foncteur composé $\widetilde{\Psi}_x = (\mathrm{d}_x\pi)^* \circ \widetilde{\Psi}_{\pi}$ est indépendant, à un isomorphisme canonique près, du choix de l'uniformisante.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.38. □

Étant donné un k-point $(x, \vec{u})$ de $\mathrm{T}^*(C)$, i.e., un k-point $x \in C(k)$ et un vecteur tangent non nul $\vec{u} \in (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^{\vee}$, on note $\Psi_{x,\vec{u}} : \mathbf{DA}(K, \Lambda) \to \mathbf{DA}(k, \Lambda)$ la composition de

$$\mathbf{DA}(K, \Lambda) \xrightarrow{\widetilde{\Psi}_x} \mathbf{DA}(\mathrm{T}_x(C), \Lambda) \xrightarrow{\vec{u}^*} \mathbf{DA}(k, \Lambda).$$

Lorsque $\pi \in \mathcal{O}_{C,x}$ est une uniformisante telle que $(\vec{u}, \mathrm{d}_x\pi) = 1$, on a un isomorphisme canonique $\Psi_{\pi} \simeq \Psi_{x,\vec{u}}$. La preuve de la proposition 2.35 permet alors de définir une application naturelle

$$\mathrm{T}^*(C)(k) \to \mathrm{Sect}_{\mathrm{mot}}(K/k), \tag{39}$$

où $\mathrm{Sect}_{\mathrm{mot}}(K/k)$ est l'ensemble des classes de conjugaison sous $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \mathbb{Z})(\mathbb{Z})$ de sections au morphisme canonique de pro-schémas en groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \mathbb{Z}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$.

Question 2.41. L'application (39) est-elle bijective ?

2.4. Algèbres de Hopf fondamentales motiviques. Étant donné un schéma pointé (X, x) sur un corps k (quelconque), on définit dans cette section une algèbre de Hopf $\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X, x, \Lambda)$ dans $\mathbf{DA}(k, \Lambda)$ qu'on appellera l'algèbre de Hopf fondamentale motivique. En effet, si X est de type fini sur k et si on se donne un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, la réalisation de cette algèbre de Hopf est liée à l'algèbre de Hopf du complété pro-algébrique du groupe fondamental $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x)$ par un morphisme naturel. Lorsque (C, c) est une k-courbe affine lisse pointée, on montrera que le complexe $\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda))$ est concentré en degré zéro du moins lorsque C est la source d'un revêtement étale d'un ouvert de $\mathbb{A}^1_k$. Le spectre de la Λ-algèbre de Hopf $\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)))$ est alors appelé le groupe fondamental motivique de C. On donnera enfin une application aux algèbres de Hopf motiviques relatives.

2.4.1. Construction et lien avec les groupes fondamentaux en topologie. Soit X un schéma noethérien. On note $\mathbf{SmDA}(X, \Lambda)$ la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{DA}(X, \Lambda)$, stable par sommes infinies et contenant les motifs fortement dualisables. Les objets de $\mathbf{SmDA}(X, \Lambda)$ seront appelés les *motifs lisses*. Les catégories $\mathbf{SmDA}(X, \Lambda)$ contiennent les motifs lisses au sens de Levine [12], i.e., les objets de la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{DA}(X, \Lambda)$, stable par sommes infinies et contenant les motifs des X-schémas projectifs et lisses. Si k est un corps de caractéristique nulle, tous les motifs sur $\mathrm{Spec}(k)$ sont lisses (en fait, ils sont même lisses au sens de Levine). 1) Autrement dit, on a $\mathbf{SmDA}(k, \Lambda) = \mathbf{DA}(k, \Lambda)$.

Étant donné un morphisme de schémas noethériens $f : Y \to X$, le foncteur $f^* : \mathbf{DA}(X, \Lambda) \to \mathbf{DA}(Y, \Lambda)$ préserve les objets fortement dualisables et commute aux sommes infinies. Il induit donc un foncteur triangulé et monoïdal

$$\phi_f^* : \mathbf{SmDA}(X, \Lambda) \to \mathbf{SmDA}(Y, \Lambda).$$

Ce foncteur admet un adjoint à droite ϕ_{f*} par [1, corollaire 2.1.22]. On fera attention au fait qu'en général le foncteur ϕ_{f*} n'est pas la restriction du foncteur f_* puisque ce dernier ne préserve pas, a priori, les motifs lisses. L'intérêt de ces considérations vient du fait suivant.

Proposition 2.42. *Soient $p : X \to S$ un morphisme de schémas noethériens et $s : S \to X$ une section à p. Alors, l'hypothèse* 1.40 *de* [5] *est satisfaite avec $\mathcal{M} = \mathbf{SmDA}(X, \Lambda)$, $\mathcal{E} = \mathbf{SmDA}(S, \Lambda)$, $f = \phi_s^*$ et $e = \phi_p^*$.*

Démonstration. On a clairement un isomorphisme de foncteurs monoïdaux, symétriques et unitaires $\phi_s^* \circ \phi_p^* \simeq \mathrm{id}$. Il reste à vérifier que le morphisme de coprojection $\phi_{s*}(M) \otimes N \to \phi_{s*}(M \otimes \phi_s^* N)$ est inversible pour tout $M \in \mathbf{SmDA}(S, \Lambda)$ et $N \in \mathbf{SmDA}(X, \Lambda)$. Puisque les catégories triangulées avec petites sommes $\mathbf{SmDA}(-, \Lambda)$ sont compactement engendrées (ce qui est automatique lorsqu'on travaille avec la topologie Nisnevich), on sait d'après [1, lemme 2.1.28] que le foncteur ϕ_{s*} commute aux sommes infinies. Il suffit donc de considérer le cas où N est compact, et donc fortement dualisable. On utilise alors le lemme 2.8 de [5] pour conclure. □

---

1) La preuve de ce fait utilise la résolution des singularités à la Hironaka. Lorsque Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, la résolution des singularités par altération à la de Jong fait encore l'affaire au-dessus d'un corps parfait de caractéristique positive.

Définition 2.43. Sous les hypothèses de la proposition 2.42, on pose

$$\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X/S, s, \Lambda) = \phi_s^* \phi_{s*}\Lambda \in \mathbf{SmDA}(S, \Lambda)$$

que l'on munit de sa structure naturelle d'algèbres de Hopf (cf. théorème 1.45 de [5]). C'est l'algèbre de Hopf *fondamentale motivique* du S-schéma pointé (X, s).

Remarque 2.44. Le cas qui nous intéresse le plus est celui où $S = \mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps de caractéristique nulle et s l'inclusion un k-point $x \in X(k)$. L'algèbre de Hopf motivique fondamentale ainsi obtenue sera notée $\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X, x, \Lambda)$. Le cas général de la construction est néanmoins utile. Ainsi, le cas de la projection sur le premier facteur $\mathrm{pr}_1 : X \times_k X \to X$ et sa section diagonale $\Delta : X \to X \times_k X$ fournit une algèbre de Hopf $\underline{\mathcal{F}}_{\mathrm{mot}}(X, \Lambda) \in \mathbf{SmDA}(X, \Lambda)$ qui dépend uniquement de X. On peut l'interpréter comme la « famille » des algèbres de Hopf motiviques fondamentales $\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X, x, \Lambda)$ lorsque x parcourt X. (Ceci est à rapprocher de certaines constructions de [17].) Pour tout $x \in X(k)$, il existe un morphisme canonique d'algèbres de Hopf $x^*(\underline{\mathcal{F}}_{\mathrm{mot}}(X, \Lambda)) \to \mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X, x, \Lambda)$. Toutefois, nous n'avons pas tenté de vérifier que ce morphisme est inversible.

Sauf mention du contraire, et jusqu'à la fin de cette section, nous supposerons que Λ *est un corps de caractéristique nulle.* Pour étudier les algèbres de Hopf motiviques fondamentales, nous aurons besoin de quelques préliminaires topologiques. Soit V est un espace analytique complexe. Rappelons qu'un *système local* sur V est un faisceau localement constant de Λ-espaces vectoriels à fibres de dimension finie. On notera $\mathbf{LS}(V, \Lambda)$ la catégorie des systèmes locaux de Λ-espaces vectoriels sur V. On a le résultat suivant.

Lemme 2.45. *Un objet* $F \in \mathbf{Shv}(V, \Lambda)$ *est un système local si et seulement s'il est fortement dualisable.*

Démonstration. Si $F \in \mathbf{Shv}(V, \Lambda)$ est un système local, il en est de même de $F^\vee = \underline{\mathsf{Hom}}(F, \Lambda)$ et le morphisme évident $(F^\vee)_x \to (F_x)^\vee$ est inversible pour tout $x \in V$. En inspectant les fibres, on trouve alors que le morphisme $\underline{\mathsf{Hom}}(F, \Lambda) \otimes_\Lambda G \to \underline{\mathsf{Hom}}(F, G)$ est inversible pour tout $G \in \mathbf{Shv}(V, \Lambda)$. Autrement dit, F est fortement dualisable. La réciproque est plus difficile. Elle sera établie en trois étapes. On supposera jusqu'à la fin de la preuve que $F \in \mathbf{Shv}(V, \Lambda)$ est fortement dualisable.

Étape 1. On montre d'abord que les morphismes de restriction de F entre ouverts connexes sont injectifs.

Soient $U \subset U'$ deux ouverts connexes de V et $a \in F(U')$ une section telle que $a_{|U} = 0$. On cherche à montrer que $a = 0$. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que $U' = V$. Notons $Z = V - U$ le fermé complémentaire et $i : Z \hookrightarrow V$ son inclusion dans V. La section a définit alors un morphisme $a : i_*\Lambda \to F$ et donc une section globale, notée encore a, de $\underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Lambda, F)$. On est donc ramené à montrer que $\Gamma(V, \underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Lambda, F)) = 0$.

Étant donné que F est fortement dualisable, on a un isomorphisme canonique $\underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Lambda, \Lambda) \otimes_\Lambda F \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Lambda, F)$. Notons Z' l'intérieur de Z (i.e., le plus grand ouvert de V contenu dans Z) et $i' : Z' \hookrightarrow V$ son inclusion dans V. On a un isomorphisme évident $\Lambda \simeq i'^*\underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Lambda, \Lambda)$. Par adjonction, on déduit un morphisme $i'_!\Lambda \to \underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Lambda, \Lambda)$. (Rappelons que $i'_!$ est l'opération « extension par zéro ».) En inspectant les fibres, on voit que ce morphisme est inversible. On déduit donc des isomorphismes de faisceaux

$$\underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Lambda, \Lambda) \otimes_\Lambda F \simeq i'_!\Lambda \otimes_\Lambda F \simeq i'_! i'^* F.$$

Puisque V et U ont été supposés connexes, l'ouvert $Z' \subset V$ est strict et le faisceau $i_!^! F$ n'a donc pas de sections globales non nulles. Il en est donc de même du faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(i_* \Lambda, F)$.

Étape 2. On montre ici que la fonction $x \in V \rightsquigarrow \dim_\Lambda(F_x)$ est bornée sur tout compact de V.

Notons I l'ensemble des sous-faisceaux de F de type fini, i.e., qui sont engendrés par un nombre fini de sections. Les éléments de I seront désignés par des lettres grecques α, β, etc. et les sous-faisceaux correspondants seront notés F_α, F_β, etc. Clairement F est l'union filtrantes des F_α lorsque α parcourt l'ensemble ordonné I.

Soit $K \subset V$ une partie compacte et notons κ son inclusion dans V. On a un isomorphisme $\kappa^*(F) \simeq \mathrm{colim}_{\alpha \in I}\ \kappa^*(F_\alpha)$. Puisque $\kappa^*(F)$ est encore fortement dualisable, le morphisme $\mathrm{colim}_{\alpha \in I}\ \underline{\mathrm{Hom}}(\kappa^* F, \kappa^* F_\alpha) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\kappa^* F, \kappa^* F)$ est inversible. Puisque K est compact, le foncteur $\Gamma(K, -)$ commute aux colimites filtrantes. On en déduit donc que le morphisme $\mathrm{colim}_{\alpha \in I} \hom(\kappa^* F, \kappa^* F_\alpha) \to \hom(\kappa^* F, \kappa^* F)$ est également inversible. Il existe donc une flèche $\kappa^* F \to \kappa^* F_\beta$ (pour un certain $\beta \in I$) qui est une section au monomorphisme $\kappa^* F_\beta \hookrightarrow \kappa^* F$. Ceci n'est possible que si ce monomorphisme est inversible. Les fibres de F en tout point de K coïncident alors avec les fibres de F_β qui sont de dimension majorée par le cardinal d'un ensemble de sections qui engendrent F_β.

Étape 3. Rappelons qu'on cherche à montrer que F est un système local. Le problème étant local et puisqu'on peut couvrir V par des ouverts relativement compacts (i.e., dont l'adhérence est compacte), on peut supposer, grâce à la seconde étape, que les dimensions des fibres de F sont bornées. On supposera aussi que V est connexe et on note $V_0 \subset V$ l'ensemble des points $x \in V$ où la dimension de F_x atteint son maximum, qu'on notera d. L'ensemble V_0 est non vide. Il est ouvert. En effet, si $x \in V_0$, on peut trouver un voisinage connexe Q de x tel que $\dim_\Lambda(F(Q)) \geq d$. Par la première étape, le morphisme $F(Q) \to F_y$ est injectif pour tout $y \in Q$. Ceci montre que $\dim_\Lambda(F_y) \geq d$. Il y a donc égalité et on obtient que $Q \subset V_0$. On voit aussi que $\dim_\Lambda(F(Q)) = d$ et pour tout ouvert connexe $Q' \subset Q$, le morphisme de restriction $F(Q) \to F(Q')$ est inversible. Autrement dit, $F_{|Q}$ est constant et $F_{|V_0}$ est un système local.

Pour terminer la preuve, on montrera que V_0 est aussi fermé. Soit $\tilde{V}_0$ un revêtement universel de V_0 et notons $f : V_0 \to V$ la projection canonique. On a alors un isomorphisme canonique $\underline{\mathrm{Hom}}(f_\sharp \Lambda, \Lambda) \otimes_\Lambda F \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(f_\sharp \Lambda, F)$. (Rappelons que $f_\sharp$ est l'adjoint à gauche de f^* qui est facile à construire lorsque f est un homéomorphisme local.) Cet isomorphisme se réécrit $f_* f^* \Lambda \otimes_\Lambda F \simeq f_* f^* F$ et $f^* F$ est un faisceau constant isomorphe à Λ^d. Soit maintenant $x \in \overline{V}_0$ un point de l'adhérence de V_0. En passant aux fibres en x, on obtient des isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathop{\mathrm{colim}}_{x \in U}\Big(\prod_{W \in \pi_0(f^{-1}(U))} \Lambda\Big) \otimes_\Lambda F(U) &\simeq \mathop{\mathrm{colim}}_{x \in U} \prod_{W \in \pi_0(f^{-1}(U))} f^* F(W) \\ &\simeq \mathop{\mathrm{colim}}_{x \in U} \prod_{W \in \pi_0(f^{-1}(U))} \Lambda^d,\end{aligned}$$

le premier étant canonique et le second dépend du choix de la trivialisation $f^* F \simeq \Lambda^d$. Ceci montre que le morphisme évident $F(U) \to f^* F(W) \simeq \Lambda^d$ est surjectif pour U un voisinage ouvert suffisamment petit de x et W une composante connexe de $f^{-1}(U)$. Ceci entraîne que $\dim_\Lambda F_x \geq d$ et donc $x \in V_0$. On a ainsi montré que $V_0 = \overline{V}_0$. □

Corollaire 2.46. *Un objet $K \in \mathbf{D}(\mathbf{Shv}(V, \Lambda))$ est fortement dualisable si et seulement si $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(K)$ est un système local.*

Démonstration. Puisque Λ est un corps, le foncteur $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(-)$ est monoïdal et unitaire. Il préserve donc les objets fortement dualisables. (Le fait qu'il n'est pas symétrique ne pose pas de problèmes !) Le lemme 2.45 entraîne alors que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons que $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(K)$ est un système local et montrons que V est fortement dualisable. On ne restreint pas la généralité en supposant que V est connexe. Ceci entraîne que les $\mathrm{H}_n(K)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit aussitôt que K appartient à la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}(V,\Lambda))$ engendrée par les objets $\mathrm{H}_n(K)[0]$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Or, par le lemme 2.45, les complexes $\mathrm{H}_n(K)[0]$ sont fortement dualisables. Il en est donc de même pour K. □

On note $\widehat{\mathbf{LS}}(V,\Lambda) \subset \mathbf{Shv}(V,\Lambda)$ la plus petite sous-catégorie pleine stable par colimites filtrantes et contenant les systèmes locaux. C'est une catégorie abélienne et tout objet de $\widehat{\mathbf{LS}}(V,\Lambda)$ est l'union filtrante de ses sous-faisceaux qui sont des systèmes locaux. Pour cela, les objets de $\widehat{\mathbf{LS}}(V,\Lambda)$ sont appelés les *ind-systèmes locaux*. On note aussi

$$\mathbf{D}_{\widehat{\mathrm{LS}}}(V,\Lambda) \subset \mathbf{D}(\mathbf{Shv}(V,\Lambda))$$

la plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies et contenant les objets fortement dualisables (ou, d'une manière équivalente, les systèmes locaux).

Proposition 2.47. *Soit $K \in \mathbf{D}(\mathbf{Shv}(V,\Lambda))$ un complexe de faisceaux de Λ-modules sur V. Si K est un objet de $\mathbf{D}_{\widehat{\mathrm{LS}}}(V,\Lambda)$, alors $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(K)$ est un ind-système local. La réciproque est vraie pour K borné à gauche, i.e., vérifiant $\mathrm{H}_n(K) = 0$ pour n suffisament grand.*

Démonstration. La preuve est facile. Elle sera omise. □

Supposons maintenant que l'espace analytique V est connexe et choisissons un point base $v \in V$. Le groupe fondamental $\pi_1(V,v)$ agit à droite sur la fibre en v de tout système local sur V.[2)] Ceci fournit une équivalence de catégories monoïdales symétriques et unitaires

$$\mathbf{LS}(V,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_f(\pi_1(V,v),\Lambda), \tag{40}$$

où $\mathbf{Rep}_f(G,\Lambda)$ est la catégorie des représentations (à droite) Λ-linéaires de dimension finie d'un groupe discret G. Étant donné qu'un ind-système local E est l'union filtrante de ses sous-systèmes locaux, le groupe $\pi_1(V,v)$ agit également sur E_v et la représentation ainsi obtenue est l'union filtrante de ses sous-représentations de dimension finie. Autrement dit, on peut prolonger (40) en une équivalence

$$\widehat{\mathbf{LS}}(V,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{Rep}}_f(\pi_1(V,v),\Lambda),$$

où $\widehat{\mathbf{Rep}}_f(G,\Lambda)$ est la catégorie des représentations (à droite) Λ-linéaires d'un groupe discret G qui sont l'union de leurs sous-représentations de dimension finie.

Soit G un groupe discret. On considère l'algèbre $\mathcal{C}^0(G,\Lambda)$ des fonctions de G à valeurs dans Λ. Le groupe G agit à droite sur cette algèbre suivant la règle : $(g\cdot f)(h) = f(gh)$ avec $g, h \in G$ et $f \in \mathcal{C}^0(G,\Lambda)$. Une fonction $f \in \mathcal{C}^0(G,\Lambda)$ est dite *G-finie* si les $g \cdot f$,

[2)] On conviendra que la composition $\gamma_1\gamma_2$ de deux lacets γ_1 et γ_2 basés en v est la concaténation de γ_1 *suivie* de γ_2. Avec cette convention, le groupe fondamental agit naturellement à *droite* sur les fibres en v des systèmes locaux.

lorsque g parcourt G, engendrent un Λ-espace vectoriel de dimension fini. (Il se trouve que la notion de G-finitude est indépendante du choix du coté auquel G agit.) On note $\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)$ la sous-algèbre des fonctions G-finies. On peut montrer que $\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)$ est l'image inverse de $\mathcal{C}^0(G,\Lambda)\otimes_\Lambda \mathcal{C}^0(G,\Lambda)$ par le morphisme $\mathcal{C}^0(G,\Lambda)\to\mathcal{C}^0(G\times G,\Lambda)$ qui à une fonction f sur G associe la fonction $(g,h)\in G\times G \rightsquigarrow f(gh)$. De plus, ce même morphisme envoie $\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)$ dans $\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)\otimes_\Lambda\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)$. On obtient ainsi une comultiplication sur $\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)$ qui en fait une Λ-algèbre de Hopf. Le pro-schéma en groupe $\mathrm{Spec}(\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda))$ est le *complété pro-algébrique* de G. (Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [10].) On a une équivalence de catégories monoïdales symétriques et unitaires

$$\mathrm{coMod}(\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{Rep}}_f(G,\Lambda). \tag{41}$$

Elle associe à un comodule à gauche M sur $\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)$ la représentation à droite de G sur M où $g\in G$ agit par la composition de

$$M \xrightarrow{ca_M} \mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)\otimes_\Lambda M \xrightarrow{\mathrm{ev}_g\otimes\mathrm{id}} \Lambda\otimes_\Lambda M \simeq M.$$

Ci-dessus, ev_g est l'évaluation d'une fonction en g. Clairement, les $\mathcal{C}^0_f(G,\Lambda)$-comodules qui sont de dimension finie sur Λ correspondent par l'équivalence (41) aux représentations de G de dimension finie.

Revenons au cas algébrique. On suppose que notre corps de base k est muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Soit X un k-schéma de type fini. Par la proposition 2.47, la composition de

$$\mathbf{SmDA}(X,\Lambda)\subset\mathbf{DA}(X,\Lambda)\xrightarrow{\mathsf{Bti}^*_X}\mathbf{D}(\mathbf{Shv}(X^{\mathrm{an}},\Lambda))\xrightarrow{\mathrm{H}_\bullet}\mathbf{Shv}(X^{\mathrm{an}},\Lambda)^{\mathbb{Z}}$$

se factorise par la sous-catégorie $\widehat{\mathbf{LS}}(X^{\mathrm{an}},\Lambda)^{\mathbb{Z}}$. (On note ici $\mathcal{E}^{\mathbb{Z}}$ la catégorie des objets $\mathbb{Z}$-gradués dans une catégorie $\mathcal{E}$.) Par la discussion ci-dessus, un k-point $x\in X(k)$ fournit un foncteur $\widehat{\mathbf{LS}}(X^{\mathrm{an}},\Lambda)\to\mathrm{coMod}(\mathcal{C}^0_f(\pi_1(X^{\mathrm{an}},x),\Lambda))$ qui est une équivalence de catégories si X est connexe. On obtient donc un foncteur monoïdal

$$\mathbf{SmDA}(X,\Lambda)\to\mathrm{coMod}(\mathcal{C}^0_f(\pi_1(X^{\mathrm{an}},x),\Lambda))^{\mathbb{Z}}.$$

De plus, par construction, on a un carré commutatif à un isomorphisme canonique près

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{SmDA}(X,\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^*_x"'] & \mathrm{coMod}(\mathcal{C}^0_f(\pi_1(X^{\mathrm{an}},x),\Lambda))^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\mathrm{oub}"] \\
\mathbf{DA}(k,\Lambda) \arrow[r, "\mathsf{Bti}^*"] & \mathbf{D}(\Lambda)\simeq\mathrm{Mod}(\Lambda)^{\mathbb{Z}}.
\end{tikzcd}$$

En appliquant la proposition 1.48 de [5], on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.48. *Soient X un k-schéma de type fini et $x\in X(k)$ un k-point. Il existe un morphisme canonique de Λ-algèbres de Hopf* $\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X,x,\Lambda))\to\mathcal{C}^0_f(\pi_1(X^{\mathrm{an}},x),\Lambda)$. *De plus, pour tout motif lisse $M\in\mathbf{SmDA}(X,\Lambda)$, l'action à droite de $\gamma\in\pi_1(X,x)$ sur la fibre en*

x du ind-système local $\mathbb{Z}$-gradué $\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*_X(M))$ *est donnée par la composition de*

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(x^*M)) &\xrightarrow{\mathrm{H}_\bullet\mathsf{Bti}^*(\mathrm{ca}_M)} \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X,x,\Lambda)\otimes x^*M)) \\ &\overset{\sim}{\leftrightarrow} \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(X,x,\Lambda)))\otimes \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(x^*M)) \\ &\to \mathcal{C}^0_f(\pi_1(X^{\mathrm{an}},x),\Lambda)\otimes \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(x^*M)) \\ &\xrightarrow{\mathrm{ev}_\gamma\otimes\mathrm{id}} \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(x^*M)),\end{aligned}$$

modulo l'isomorphisme canonique $(\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*_X(M)))_x \simeq \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(x^*M))$.

2.4.2. Le cas d'une courbe affine lisse. Le but de cette section est de démontrer le résultat ci-dessous et d'en donner quelques applications. Sauf mention du contraire, Λ est un corps de caractéristique nulle.

Théorème 2.49. *Supposons que C est une k-courbe affine, lisse et connexe munie d'un k-point $c \in C(k)$. Alors, le complexe $\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda))$ est concentré en degré zéro, i.e., $\mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda))) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$. De plus, si C est un revêtement étale d'un ouvert Zariski de $\mathbb{A}^1_k$, le morphisme canonique (cf. théorème 2.48)*

$$\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda))) \to \mathcal{C}^0_f(\pi_1(C^{\mathrm{an}},c),\Lambda) \tag{42}$$

est injectif.[3] *Autrement dit, l'image de $\pi_1(C^{\mathrm{an}},c)$ dans* $\mathrm{Spec}(\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda))))$ *est Zariski dense.*

Avant de donner la preuve de ce théorème, on en profite pour faire la définition suivante.

Définition 2.50. Le spectre de l'algèbre de Hopf $\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda)))$ est appelé le *groupe fondamentale motivique* de la k-courbe pointée (C,c) et sera noté $\Pi^{\mathrm{mot}}_1(C,c,\Lambda)$. C'est un pro-schéma en groupe sur le corps Λ et on dispose d'un morphisme naturel de schémas en groupe $\pi_1(C^{\mathrm{an}},c) \to \Pi^{\mathrm{mot}}_1(C,c,\Lambda)$, où $\pi_1(C^{\mathrm{an}},c)$ est considéré comme un groupe discret.

Démonstration. On divise la preuve en plusieurs parties. Dans la première, on montre que $\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda))$ est concentré en degré zéro. Dans la dernière, on montre l'injectivité de (42) en se basant sur la seconde et troisième partie.

Étape A. Par la proposition 2.53 ci-dessous, appliquée au morphisme de Λ-algèbres de Hopf $\mathbb{Z}$-graduées

$$\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda))) \to \mathcal{C}^0_f(\pi_1(C^{\mathrm{an}},c),\Lambda)$$

du théorème 2.48, il suffira de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$, le sous-espace vectoriel des invariants pour la coaction de $\mathcal{C}^0_f(\pi_1(C^{\mathrm{an}},c),\Lambda)$ sur $\mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda)))$ est nul. Or, le sous-espace des invariants d'un $\mathcal{C}^0_f(\pi_1(C^{\mathrm{an}},c),\Lambda)$-comodule à gauche est égal au sous-espace des invariants de la $\pi_1(C,c)$-représentation à droite associée et s'identifie donc canoniquement à l'espace des sections globales du ind-système local associé. Par le théorème 2.48, le ind-système local associé au comodule $\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C,c,\Lambda)))$ est canoniquement isomorphe à $\mathsf{Bti}^*_C(\phi_{c*}\Lambda)$. Il suffit donc de montrer que le morphisme $\Lambda \to \Gamma(C^{\mathrm{an}},\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*_C(\phi_{c*}\Lambda)))$, induit par l'unité de l'algèbre $\phi_{c*}\Lambda$, est inversible.

[3] La condition sur C est probablement superflue pour la validité de cette propriété.

Par le lemme 2.51 ci-dessous, on peut trouver une petite catégorie cofiltrante (et même un ensemble ordonné) $\mathcal{I}$ et un diagramme de motifs $M \in \mathbf{DA}((C, \mathcal{I}), \Lambda)$ tels que $i^*M \in \mathbf{DA}(C, \Lambda)$ est fortement dualisable pour tout $i \in \mathcal{I}$ et $p_\sharp M \simeq \phi_{c*}\Lambda$ où $p : \mathcal{I} \to \mathbf{e}$ est l'unique foncteur vers la catégorie $\mathbf{e}$ ayant un seul objet et un seul morphisme. On supposera aussi que l'unité de l'algèbre $\phi_{c*}\Lambda$ est induite par un morphisme $\Lambda \to i_0^*(M)$ pour un certain $i_0 \in \mathcal{I}$. Le foncteur Bti_C^* commute aux colimites homotopiques, le foncteur $\mathrm{H}_\bullet$ transforme une colimite filtrante homotopique en une colimite filtrante (catégorique) et le foncteur $\Gamma(C^{\mathrm{an}}, -)$, restreint à $\widehat{\mathbf{LS}}(C^{\mathrm{an}})$, commute aux colimites filtrantes. On obtient ainsi un isomorphisme

$$\operatorname*{colim}_{i \in I} \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(i^*M))) \simeq \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(\phi_{c*}\Lambda))).$$

Par le lemme 2.52 ci-dessous, on dispose d'un isomorphisme (non canonique)

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}_C^*(i^*M))[n] \simeq \mathsf{Bti}_C^*(i^*M)$$

dans $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}, \Lambda))$. Il induit un monomorphisme de Λ-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués

$$\Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(i^*(M)))) \to \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}f_*^{\mathrm{an}}\mathsf{Bti}_C^*(i^*(M))). \tag{43}$$

Ci-dessus, on a noté f la projection de C sur $\mathrm{Spec}(k)$. L'isomorphisme du lemme 2.52 étant bien défini modulo des flèches du type $\mathrm{H}_n(-)[n] \to \mathrm{H}_{n+1}(-)[n+1]$, le monomorphisme (43) est canonique. On peut donc prendre sa colimite suivant $i \in \mathcal{I}$ pour obtenir un morphisme injectif de Λ-algèbres graduées

$$\operatorname*{colim}_{i \in \mathcal{I}} \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(i^*(M)))) \to \operatorname*{colim}_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}f_*^{\mathrm{an}}\mathsf{Bti}_C^*(i^*(M))).$$

Il est donc plus précis de montrer que le morphisme canonique $\Lambda \to p_\sharp \mathsf{R}f_*^{\mathrm{an}}\mathsf{Bti}_C^*(M)$ est inversible. Étant donné que les motifs $i^*(M)$ (pour $i \in \mathcal{I}$) sont compacts (puisque fortement dualisables), on peut utiliser [4] pour déduire un isomorphisme canonique

$$\mathsf{Bti}^* f_*(M) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}f_*^{\mathrm{an}}\mathsf{Bti}^*(M).$$

(C'est ici qu'on a besoin de travailler avec le diagramme de motifs M au lieu de raisonner directement avec le motif $\phi_{c*}\Lambda$.) Par ailleurs, on a des isomorphismes canoniques $p_\sharp \circ \mathsf{Bti}^* \simeq \mathsf{Bti}^* \circ p_\sharp$ et $p_\sharp \circ f_* \simeq f_* \circ p_\sharp$. Le second isomorphisme, propre au contexte motivique, est une conséquence formelle de [2, proposition 4.5.63]. On est donc ramené en fin de compte à montrer que le morphisme $\Lambda \to f_*\phi_{c*}\Lambda$, déduit de l'unité de l'algèbre $\phi_{c*}\Lambda$, est inversible. Étant donné que $f_* : \mathbf{DA}(C, \Lambda) \to \mathbf{DA}(k, \Lambda)$ préserve les motifs lisses (puisque tous les motifs dans $\mathbf{DA}(k, \Lambda)$ sont lisses !) sa restriction à $\mathbf{SmDA}(C, \Lambda)$ coïncide avec ϕ_{f*}. En particulier, on a un isomorphisme d'algèbres $f_*\phi_{c*}\Lambda \simeq \phi_{f*}\phi_{c*}\Lambda$. Or, $\phi_{f*}\phi_{c*}$ est l'adjoint à droite de $\phi_c^*\phi_f^* \simeq \mathrm{id}$. Il est donc lui-même isomorphe au foncteur identité. Ceci termine la preuve de la première partie de l'énoncé.

Étape B. Pour tout $M \in \mathbf{SmDA}(C, \Lambda)$, on dispose d'une action de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ sur $\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^*(M))$. Nous allons d'abord montrer que le sous-espace $V_1 \subset \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^*(M))$ des invariants pour l'action de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ coïncide avec le sous-espace $V_2 \subset \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^*(M))$ des invariants pour l'action de $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$. Vu le lemme 2.51, on peut supposer que M est compact. L'inclusion $V_1 \subset V_2$ est claire. Il s'agit de montrer l'inclusion inverse. Or, en raisonnant comme dans l'étape A, il est facile de voir que V_2 est l'image du morphisme canonique

$$\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\phi_c^*(f^*f_*M))) \to \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\phi_c^*(M))) \tag{44}$$

induit par la counité de l'adjonction (f^*, f_*). (On rappelle que f est la projection de C sur $\mathrm{Spec}(k)$.) Or, l'algèbre de Hopf $\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ coagit trivialement sur $\phi_c^*(f^* f_* M)$. Il en découle que l'image de (44) est contenue dans V_1. Ceci fournit l'inclusion recherchée : $V_2 \subset V_1$.

Étape C. Soit $r : \widetilde{C} \to C$ un revêtement étale et $\tilde{c} \in \widetilde{C}(k)$ un point rationnel appartenant à la fibre $r^{-1}(c)$. Dans cette étape, on cherche à comparer les pro-schémas en groupe $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ et $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$.

Le foncteur r_* envoie $\mathbf{SmDA}(\widetilde{C}, \Lambda)$ dans $\mathbf{SmDA}(C, \Lambda)$. Il s'ensuit que $r_* M = \phi_{r*} M$ pour tout $M \in \mathbf{SmDA}(\widetilde{C}, \Lambda)$. On en déduit aussitôt des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda) &\simeq \phi_c^* \phi_{c*} \Lambda \simeq c^* r_* \phi_{\tilde{c}*} \Lambda \\ &\simeq \tilde{c}^* \phi_{\tilde{c}*} \Lambda \oplus \{z \to c\}_* z^* \phi_{\tilde{c}*} \Lambda \simeq \mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda) \oplus \{z \to c\}_* z^* \phi_{\tilde{c}*} \Lambda,\end{aligned}$$

où z désigne le sous-schéma fermé $r^{-1}(c) - \{\tilde{c}\} \subset \widetilde{C}$ ainsi que son inclusion dans $\widetilde{C}$. Il s'ensuit aussitôt que le morphisme canonique

$$\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda) \to \Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda) \tag{45}$$

est injectif et que $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ s'identifie au stabilisateur de $\tilde{c}$ pour l'action de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ sur la fibre $(r^{\mathrm{an}})^{-1}(c)$. En particulier, (45) induit un isomorphisme sur les composantes connexes. On a la même situation pour les groupes fondamentaux topologiques. Il s'ensuit alors que le carré

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\widetilde{C}^{\mathrm{an}}, \tilde{c}) \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda) \arrow[d] \\ \pi_1(C^{\mathrm{an}}, c) \arrow[r] & \Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Un argument similaire fournit, pour l/k est une extension finie, un isomorphisme canonique d'algèbres de Hopf $(l/k)^* \mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda) \simeq \mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C \otimes_k l, c, \Lambda)$. Les détails seront laissés au lecteur.

Étape D. Nous sommes maintenant prêts pour montrer que (42) est injectif lorsque C est un revêtement étale d'un ouvert de $\mathbb{A}_k^1$. En appliquant les résultats de l'étape C, on voit qu'il suffit de traiter le cas de cet ouvert. Autrement dit, on peut supposer que C est un ouvert de $\mathbb{A}_k^1$. En utilisant la dernière assertion de l'étape C, on peut se ramener aussi au cas où k est algébriquement clos. Ceci n'est pas strictement nécessaire mais facilitera la preuve.

Raisonnons par l'absurde et supposons que le morphisme (42) n'est pas injectif (avec $C = C'$ un ouvert de la droite affine). On a alors une inclusion stricte $H \subsetneq \Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ avec H l'adhérence Zariski de l'image de $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$. D'après l'étape C, pour tout revêtement étale $r : \widetilde{C} \to C$ et $\tilde{c} \in r^{-1}(c)$, le sous-groupe $H \cap \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ est encore strict dans $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$. Ceci reste vrai pour l'intersection de tous les $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ lorsque $(\widetilde{C}, \tilde{c})$ varie. On peut donc trouver un élément $\alpha \in \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)))$ (i.e., une fonction régulière sur le pro-schéma en groupe $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$) dont la restriction à H est nulle mais qui ne s'annule sur aucun des pro-schémas en groupe $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$.

Considérons maintenant le sous-comodule $P \subset \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)))$ engendré par α. C'est un Λ-espace vectoriel de dimension finie munie d'une action du pro-schéma en groupe $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$. Par construction, pour tout $(\widetilde{C}, \tilde{c})$ comme ci-dessus, l'image de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ dans le groupe linéaire $\mathbb{Gl}(P)$ n'est pas contenue dans l'image de H.

En utilisant le lemme 2.51, on peut trouver un objet compact $M \in \mathbf{SmDA}(C, \Lambda)$ muni d'un morphisme $M \to \phi_{c*}\Lambda$ tel que P est contenu dans l'image de

$$\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^* M) \to \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathscr{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda))).$$

D'après la discussion précédente, pour tout $(\widetilde{C}, \tilde{c})$ comme ci-dessus, l'image de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ dans le groupe linéaire $\mathbb{G}\mathrm{l}(\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^* M))$ n'est pas contenue dans l'image de H. Notons $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ les images de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ et H dans $\mathbb{G}\mathrm{l}(\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^* M))$. Notons aussi $\mathbf{G}^\circ$ l'intersection des images de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ quand $(\widetilde{C}, \tilde{c})$ varie. Bien entendu, $\mathbf{G}^\circ$ est aussi l'image de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ pour $(\widetilde{C}, \tilde{c})$ suffisamment fin (dans la tour des revêtements étales de C). D'après ce qui précède, $\mathbf{G}^\circ$ n'est pas contenu dans $\mathbf{H}$.

Par un théorème classique de Chevalley, quitte à remplacer M par une puissance tensoriel suffisamment grande de $M \otimes M^\vee$, on peut trouver $v \in \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^* M)$ tel que $\mathbf{H}$ est le stabilisateur dans $\mathbf{G}$ de la droite $\Lambda \cdot v$.

Rappelons que C est un ouvert de $\mathbb{A}_k^1$. Notons $z_1, \ldots, z_n$ les points de $\mathbb{A}_k^1 - C$. Pour $1 \leq i \leq n$, choisissons un lacet γ_i basé en c et tournant autour de z_i. Alors, le groupe $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$ est librement engendré par les classes d'homotopie $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_n]$. Rappelons aussi que $\mathbf{H}$ est l'adhérence Zariski de l'image de $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$ dans $\mathbb{G}\mathrm{l}(\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*\phi_c^* M))$. Il en découle que $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$ stabilise la droite $\Lambda \cdot v$. Par ailleurs, d'après le théorème de monodromie locale de Grothendieck (voir par exemple [11, théorème 2.1.2]), l'action des $[\gamma_i]$ est quasi-unipotente. Il en découle que l'image de $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$ dans $\mathbb{G}\mathrm{l}(\Lambda \cdot v)$ est finie. Autrement dit, il existe $(\widetilde{C}, \tilde{c})$ comme ci-dessus tel que $\pi_1(\widetilde{C}^{\mathrm{an}}, c)$ agit par l'identité sur v. D'après l'étape B, on déduit que $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ agit aussi par l'identité sur v. Il en découle que $\mathbf{G}^\circ \subset \mathbf{H}$. C'est la contradiction recherchée. □

Dans la preuve du théorème 2.49 (et notamment l'étape A), on s'est servi de plusieurs résultats. Voici le premier.

Lemme 2.51. *Soient X un schéma noethérien et N un objet de $\mathbf{SmDA}(X, \Lambda)$. Il existe alors un ensemble ordonné filtrant I et un diagramme de motifs $M \in \mathbf{DA}((X, I^{\mathrm{op}}), \Lambda)$ tel que les motifs i^*M sont fortement dualisables pour tout $i \in I$ et $N \simeq \mathrm{hocolim}_I\, M$.*

Démonstration. La preuve est formelle et sera omise. □

Le résultat suivant a également servi dans la preuve du théorème 2.49. C'est un résultat standard et nous n'en donnerons pas de preuve.

Lemme 2.52. *Soit C une k-courbe affine lisse et géométriquement connexe, et soient F et G des systèmes locaux de Λ-espaces vectoriels sur C^{an}. Alors*

$$\hom_{\mathbf{D}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}, \Lambda))}(F, G[n]) = 0$$

pour $n \notin \{0, 1\}$. De plus, tout objet compact $K \in \mathbf{D}(\mathbf{Shv}(C^{\mathrm{an}}, \Lambda))$ est non canoniquement isomorphe à $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(K)[n]$.

Le troisième et dernier résultat dont on a eu besoin dans la preuve du théorème 2.49 porte sur les algèbres de Hopf $\mathbb{Z}$-graduées.

Proposition 2.53. *Supposons donné un morphisme de Λ-algèbres de Hopf $\mathbb{Z}$-graduées commutatives (au sens gradué !) $A_\bullet \to B_\bullet$ tel que $B_\bullet$ est concentrée en degré zéro, i.e., $B_n = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A_n est naturellement un B_0-comodule. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, le sous-espace vectoriel des B_0-invariants dans A_n est nul. Alors, les A_n sont nuls pour tous les $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, i.e., la Λ-algèbre de Hopf $A_\bullet$ est elle aussi concentrée en degré zéro.*

Démonstration. La Λ-algèbre de Hopf $A_\bullet$ est l'union filtrante de ses sous-algèbres de Hopf graduées qui sont des Λ-algèbres de type fini. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que $A_\bullet$ est une Λ-algèbre de type fini. En particulier, les A_n sont des A_0-modules de type fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $I_\bullet \subset A_\bullet$ l'idéal engendré par le éléments homogènes de degré non nul. Alors, $I_\bullet$ est clairement un coidéal bilatère, i.e., la comultiplication de $A_\bullet$ envoie $I_\bullet$ dans $(I_\bullet \otimes A_\bullet) + (A_\bullet \otimes I_\bullet)$. Il s'ensuit que $(A/I)_\bullet = A_\bullet/I_\bullet$ est une Λ-algèbre de Hopf $\mathbb{Z}$-graduée telle que $(A/I)_n = 0$ pour $n \neq 0$. De plus, le morphisme $A_\bullet \to B_\bullet$ se factorise par $(A/I)_\bullet$. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que $B_\bullet = (A/I)_\bullet$. On divise la preuve dans ce cas en deux parties.

Partie A. Soit $J_\bullet \subset A_\bullet$ l'ideal engendré par les éléments homogènes de degré impair. C'est aussi un coidéal bilatère de $A_\bullet$. On montrera dans cette partie que $J_\bullet = 0$.

Remarquons d'abord que la contrainte de commutativité pour les Λ-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués entraîne que tout élément de $J_\bullet$ est nilpotent. Ainsi, si $J_\bullet \neq 0$, il existe un entier $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $J_\bullet^m \neq 0$ et $J_\bullet^{m+1} = 0$. Il est facile de voir que le sous-espace vectoriel $J_\bullet^m$ est stable par la coaction de l'algèbre de Hopf $(A/J)_\bullet$. Il est aussi facile de voir que la coaction $ca : J_\bullet^m \to (A/J)_\bullet \otimes J_\bullet^m$ est un morphisme de $(A/J)_\bullet$-modules lorsqu'on fait agir $(A/J)_\bullet$ sur $(A/J)_\bullet \otimes J_\bullet^m$ par restriction suivant le morphisme de comultiplication. Le lemme 2.54 ci-dessous entraîne alors que le $(A/J)_\bullet$-comodule $J_\bullet^m$ est isomorphe à une somme directe non nulle de copies de $(A/J)_\bullet[i]$ avec i des entiers relatifs impairs. Étant donné que les $\Lambda[i] \subset (A/J)_\bullet[i]$ sont invariants par la coaction de B_0, on obtient une contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. On a donc nécessairement $J_\bullet = 0$.

Partie B. Dans la partie précédente, nous avons montré que l'idéal $J_\bullet$ est nul. Autrement dit, $A_\bullet$ est concentré en degrés pairs et $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_{2n}$ est une Λ-algèbre de Hopf non graduée. On peut donc considérer le Λ-schéma en groupe $G = \mathrm{Spec}(A)$. La $2\mathbb{Z}$-graduation sur A induit une action de $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ sur G par automorphismes de groupes. De plus, $H = \mathrm{Spec}(B) \subset G$ est le sous-groupe des points fixes pour l'action de $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$. (Bien entendu $B = (A/I)$ avec $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_{2n}$.) Nous allons montrer que le quotient G/H est affine. Ceci terminera la preuve de la proposition. En effet, la condition de l'énoncé équivaut à dire que G/H n'a pas de fonctions globales à part les contantes.

Pour démontrer que G/H est affine, on raisonne de la manière suivante. Soit $\tilde{G} = G \rtimes_\Lambda \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ et $\iota : \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda \hookrightarrow \tilde{G}$ l'inclusion canonique. Alors, le centralisateur du sous-groupe $\iota(\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda)$ est $\tilde{H} = H \times_\Lambda \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ et il suffit de voir que $\tilde{G}/\tilde{H}$ est affine. Étant donné un plongement $\tilde{G} \hookrightarrow \mathbb{G}\ell(n)_\Lambda$, le quotient $\tilde{G}/\tilde{H}$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{G}\ell(n)_\Lambda/R$ avec R le centralisateur de l'image de $\iota(\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda)$. On obtient le résultat recherché en utilisant que le centralisateur d'un tore de $\mathbb{G}\ell(n)_\Lambda$ est un sous-groupe réductif. □

Lemme 2.54. *Soient $A_\bullet$ une Λ-algèbre de Hopf $\mathbb{Z}$-graduée commutative, et $M_\bullet$ un $A_\bullet$-comodule à gauche muni d'une structure de $A_\bullet$-module telle que $ca : M_\bullet \to A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet$ est un morphisme de $A_\bullet$-modules. (Ici, $A_\bullet$ agit sur $A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet$ par restriction suivant le morphisme de comultiplication.) Alors, la composition de $M_\bullet \xrightarrow{ca} A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet \to A_\bullet \otimes_\Lambda cu^*(M_\bullet)$, avec*

$cu^*M = M \otimes_{A_\bullet, cu} \Lambda$, est un isomorphisme de $A_\bullet$-modules et de $A_\bullet$-comodules. Ici, $A_\bullet$ agit et coagit via son action et sa coaction sur le premier facteur de $A_\bullet \otimes_\Lambda cu^*(M_\bullet)$.

Démonstration. Le morphisme $ca : M_\bullet \to A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet$ est un morphisme de $A_\bullet$-comodules à gauche (où $A_\bullet$ coagit via sa coaction sur le premier facteur de $A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet$). De plus, $ca : M_\bullet \to A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet$ est un monomorphisme scindé de $A_\bullet$-modules. (Une section est donnée par $cu \otimes \mathrm{id} : A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet \to M_\bullet$.) En considérant les cas de $M_\bullet$ et de $A_\bullet \otimes_\Lambda M_\bullet/ca(M_\bullet)$, on se ramène à montrer le lemme pour les $A_\bullet$-comodules de la forme $A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet$ tels que $N_\bullet$ est un A-module muni de la coaction triviale par $A_\bullet$ et $A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet$ est muni de la structure de A-modules obtenue par restriction suivant la comultiplication de $A_\bullet$. Il s'agit alors de montrer que la composition de

$$A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet \xrightarrow{cm} A_\bullet \otimes_\Lambda A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet \to A_\bullet \otimes_\Lambda cu^*(A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet)$$

est inversible. Étant donné que $A_\bullet$ est une algèbre de Hopf (et pas simplement une bialgèbre), la Λ-algèbre $A_\bullet$ s'identifie au produit tensoriel $(A_\bullet \otimes_\Lambda A_\bullet) \otimes_{cm, A_\bullet, cu} \Lambda$ à l'aide des morphismes $m \circ (\mathrm{id} \otimes \iota) : A_\bullet \otimes_\Lambda A_\bullet \to A_\bullet$ et $u : \Lambda \to A_\bullet$. (Bien entendu, ι est l'antipode de $A_\bullet$.) On obtient alors des isomorphismes canoniques

$$cu^*(A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet) \simeq (A_\bullet \otimes_\Lambda (N_\bullet \otimes_{A_\bullet, \iota} A_\bullet)) \otimes_{A_\bullet \otimes_\Lambda A_\bullet, m} A_\bullet \simeq N_\bullet \otimes_{A_\bullet, \iota} A_\bullet.$$

De plus, modulo cette identification, le morphisme évident $A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet \to cu^*(A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet)$ correspond à $cu \otimes \mathrm{id} : A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet \to N_\bullet$ composé avec $N_\bullet \simeq N_\bullet \otimes_{A_\bullet, \iota} A_\bullet$. On est donc ramené en fin de compte à montrer que la composition de

$$A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet \xrightarrow{ca} A_\bullet \otimes_\Lambda A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes cu \otimes \mathrm{id}} A_\bullet \otimes_\Lambda N_\bullet$$

est inversible. Or, cette composition donne l'identité. □

On termine cette section avec deux applications aux algèbres de Hopf et groupes de Galois motiviques relatifs.

Théorème 2.55. *(Ici, on ne suppose pas que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.) Soient K/k une extension de type fini et géométriquement connexe, et $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe. Alors, la Λ-algèbre de Hopf $\mathbb{Z}$-graduée $\mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda)_{\mathrm{gr}}$ est concentrée en degré zéro.*

Démonstration. Vu l'isomorphisme $\mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda)_{\mathrm{gr}} \simeq \mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \mathbb{Z})_{\mathrm{gr}} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ et étant donné que le $\mathbb{Z}$-module gradué $\mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \mathbb{Z})_{\mathrm{gr}}$ est sans torsion, on peut supposer que Λ est un corps. Ceci nous permettra d'utiliser les résultats de cette section. Pour une raison technique, nous allons aussi supposer que le corps k est dénombrable. Le cas général s'en déduit grâce au lemme 2.27. En utilisant le lemme 2.30 et la remarque 2.33, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour une extension L/l, où l est une extension finie de k et L une extension finie de $K \otimes_k l$. Ainsi, on ne restreint pas la généralité en supposant qu'il existe une suite de sous-corps $k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n = K$ avec k_i/k_{i-1} le corps de fraction d'une k_{i-1}-courbe admettant un point rationnel. On raisonnant comme dans la preuve de la proposition 2.35, on voit que $\mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda)_{\mathrm{gr}}$ est un produit tensoriel semi-direct itéré des algèbres de Hopf relatives $\mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k_{i-1}}(k_i, \sigma, \Lambda)_{\mathrm{gr}}$. Par récurrence on se ramène donc au cas où $K = k(C)$ avec C

une courbe affine lisse admettant un k-point $c \in C(k)$. En fait, on peut de plus supposer que k est algébriquement clos, ce qu'on fera.

Soit π une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{C,c}$ et soit

$$\mathfrak{P}^* = \Psi_\pi : \mathbf{DA}(K,\Lambda) \to \mathbf{DA}(k,\Lambda)$$

le foncteur « motif proche » associé. Ce foncteur admet un adjoint à droite $\mathfrak{P}_*$ et on a vu, dans la preuve de la proposition 2.35, que $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$ est un produit semi-direct de $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ par $\mathsf{Bti}^*(\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0))$. En particulier, on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées

$$\mathsf{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0))) \simeq \mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)_{\mathrm{gr}}.$$

Il suffit donc de montrer que le complexe $\mathsf{Bti}^*(\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_*\Lambda(0))$ est concentré en degré zéro.

Si $U \subset C$ est un ouvert Zariski non vide, on note $\mathfrak{P}^*_U : \mathbf{SmDA}(U,\Lambda) \to \mathbf{DA}(k,\Lambda)$ la composition de Ψ_π et du foncteur évident $\mathbf{SmDA}(U,\Lambda) \to \mathbf{DA}(K,\Lambda)$. Le foncteur $\mathfrak{P}^*_U$ admet un adjoint à droite $\mathfrak{P}_{U*}$ et on vérifie sans aucune difficulté qu'il satisfait à l'hypothèse 1.40 dans [5]. Comme k est supposé dénombrable, on peut donner un sens à $\mathrm{hocolim}_{U\subset C}(\mathfrak{P}_{U*}\Lambda(0))_{|K}$ où U parcourt les ouverts non vides de C. (Il suffit en fait de choisir une application croissante et finale de $\mathbb{N}$ dans l'ensembles des ouverts non vides de C ordonné par l'opposée de la relation d'inclusion.) Le morphisme $\mathrm{hocolim}_{U\subset C}(\mathfrak{P}_{U*}\Lambda(0))_{|K} \to \mathfrak{P}_*\Lambda(0)$ est alors inversible. On peut vérifier ceci après application des foncteurs $\hom_{\mathbf{DA}(K,\Lambda)}(M,-)$ avec M des motifs compacts ; les détails sont omis.

On est maintenant ramené à prouver que le complexe $\mathsf{Bti}^*(\mathfrak{P}^*_U\mathfrak{P}_{U*}\Lambda(0))$ est concentré en degré zéro pour $U \subset C$ un ouvert non vide. Lorsque $c \in U(k)$, on peut utiliser le théorème 2.49 pour conclure. Dans le cas général, on s'y ramène de la manière suivante. Soit $u \in U(k)$ un k-point. En adaptant la preuve de la proposition 2.20, on peut montrer que les deux foncteurs $\mathsf{Bti}^* \circ \mathfrak{P}^*_U$ et $\mathsf{Bti}^* \circ \phi^*_u$ sont isomorphes. (Un tel isomorphisme dépend du choix d'un chemin $\gamma : [0,1] \to C^{\mathrm{an}}$ joignant u à c et tel que $\gamma([0,1[)$ est contenu dans U^{an}.) On en déduit alors un triangle commutatif d'algèbres de Hopf

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{Bti}^* \circ \mathfrak{P}^*_U)(\mathfrak{P}_{U*} \circ \mathsf{Bti}_*)\Lambda \arrow[r, "\sim"] & (\mathsf{Bti}^* \circ \phi^*_u)(\phi_{u*} \circ \mathsf{Bti}_*)\Lambda \\
& \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda. \arrow[u] \arrow[ul, bend left]
\end{tikzcd}$$

La flèche horizontale ci-dessus s'écrit :

$$\mathsf{Bti}^*(\mathfrak{P}^*_U\mathfrak{P}_{U*}\Lambda) \otimes \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Bti}^*(\phi^*_u\phi_{u*}\Lambda) \otimes \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$$

en utilisant le théorème 2.7. De plus, les flèches oblique et verticale correspondent aux morphismes évidents. On obtient ainsi un isomorphisme $\mathsf{Bti}^*(\mathfrak{P}^*_U\mathfrak{P}_{U*}\Lambda) \simeq \mathsf{Bti}^*(\phi^*_u\phi_{u*}\Lambda)$. Le théorème est démontré. □

Corollaire 2.56. *(Ici, on ne suppose pas que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.) Soient K/k une extension de type fini et géométriquement connexe, et $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe. Supposons que K admet un modèle contenant un k-point. Alors, l'algèbre de Hopf $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)$ est un produit tensoriel semi-direct de $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ avec une algèbre de Hopf concentrée en degré zéro, à savoir $\mathscr{H}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)$.*

Soient K/k une extension de type fini et géométriquement connexe, et $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe. Notons $\mathrm{Spec}(K/k)^{\mathrm{an}}$ la pro-variété analytique $(\mathrm{Spec}(A \otimes_k \mathbb{C})^{\mathrm{an}})_{A\subset K}$ où A parcourt les sous-k-algèbres lisses et de type fini de K. Cette pro-variété analytique est pointée par les morphismes $A \otimes_k \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induits par σ ; par abus de notation, ces points seront désignés par σ. On peut donc considérer le pro-groupe fondamental topologique $\pi_1(\mathrm{Spec}(K/k)^{\mathrm{an}}, \sigma)$.

Théorème 2.57. *Il existe un morphisme canonique de pro-schémas en groupe*

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(K/k)^{\mathrm{an}}, \sigma) \to \mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda). \tag{46}$$

De plus, l'image de (46) *est Zariski dense dans* $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K, \sigma, \Lambda)$.

Démonstration. On supposera que k est dénombrable et on laissera au lecteur le soin de se débarasser de cette hypothèse superflue.

Expliquons d'abord la construction du morphisme (46). Soit $A \subset K$ une k-algèbre de type fini et lisse, et notons $X = \mathrm{Spec}(A)$. Considérons le foncteur

$$\mathfrak{Q}^*_X = \mathfrak{Q}^*_A : \mathbf{SmDA}(X, \Lambda) \to \mathbf{D}(\mathbb{Q})$$

donné par la composition de

$$\mathbf{SmDA}(X, \Lambda) \to \mathbf{DA}(K, \Lambda) \xrightarrow{\mathsf{Bti}^*_K} \mathbf{D}(\Lambda).$$

Le foncteur $\mathfrak{Q}^*_A$ (ou $\mathfrak{Q}^*_X$) admet un adjoint à droite $\mathfrak{Q}_{A*}$ (ou $\mathfrak{Q}_{X*}$) et on vérifie sans difficulté qu'il satisfait à l'hypothèse 1.40 de [5]. On peut donc lui associer une algèbre de Hopf $\mathfrak{Q}^*_A \mathfrak{Q}_{A*}\Lambda$. Comme k est supposé dénombrable, on peut donner un sens à $\mathrm{hocolim}_{A\subset K}\, \mathfrak{Q}_{A*}\Lambda$ et il est facile de voir qu'on a $\mathrm{hocolim}_{A\subset K}\, \mathfrak{Q}_{A*}\Lambda \simeq \mathsf{Bti}_{K,*}\Lambda$. Il en découle un isomorphisme d'algèbres de Hopf dans $\mathbf{D}(\Lambda)$:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda) \simeq \operatorname*{hocolim}_{A\subset K} \mathfrak{Q}^*_A \mathfrak{Q}_{A*}\Lambda.$$

Par ailleurs, on dispose d'un diagramme commutatif à un isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{SmDA}(X, \Lambda) \arrow[r, "\mathfrak{Q}^*_A"] \arrow[d] & \mathbf{D}(\Lambda). \\
\mathbf{D}_{\widehat{\mathrm{LS}}}(X^{\mathrm{an}}, \Lambda) \arrow[ur, bend right, "\sigma^*"'] &
\end{tikzcd}$$

En utilisant la proposition 1.48 de [5], on obtient des morphismes d'algèbres de Hopf

$$\mathfrak{Q}^*_A \mathfrak{Q}_{A*}\Lambda \to \mathcal{C}^0_f(\pi_1(X^{\mathrm{an}}, \sigma), \Lambda).$$

En passant à la limite suivant $A \subset K$, on déduit un morphisme d'algèbres de Hopf

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda) \to \mathcal{C}^0_f(\pi_1(\mathrm{Spec}(K/k)^{\mathrm{an}}, \sigma), \Lambda).$$

Il correspond à un morphisme de pro-schémas en groupe

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(K/k)^{\mathrm{an}}, \sigma) \to \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma, \Lambda). \tag{47}$$

En composant (47) avec $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K,\sigma,\Lambda)\to\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$, on obtient le morphisme trivial. (En effet, ce morphisme composé est la « limite projective » suivant $A\subset K$ des morphismes obtenus, via la proposition 1.48 de [5], à partir de la composition de

$$\mathbf{DA}(k,\Lambda)\to\mathbf{SmDA}(X^{\mathrm{an}},\Lambda)\to\mathbf{D}_{\widehat{\mathrm{LS}}}(X^{\mathrm{an}},\Lambda)\xrightarrow{\sigma^*}\mathbf{D}(\Lambda).$$

Or, la composition des deux premiers foncteurs ci-dessus se factorise à travers $\mathbf{D}(\Lambda)$.) Il en découle que le morphisme (47) se factorise à travers $\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)$, ce qui fournit le morphisme recherché.

Il reste à montrer que l'image de (46) est Zariski dense. Étant donnée une extension intermédiaire $L/k\subset K/k$ telle que K/L est géométriquement connexe, on a une suite exacte de pro-schémas en groupe

$$1\to\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/L}(K,\sigma,\Lambda)\to\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(K,\sigma,\Lambda)\to\mathbf{G}^{\mathrm{rel}}_{/k}(L,\sigma,\Lambda)\to 1.$$

Il est donc suffisant de traiter le cas des extensions L/k et K/L. Autrement dit, on peut supposer que $K=k(C)$ est le corps des fonctions rationnelles d'une courbe C. Vue la proposition 2.32, on peut également supposer que k est algébriquement clos.

Soit U un ouvert Zariski de C et supposons que U est un revêtement étale d'un ouvert de $\mathbb{A}^1_k$. Nous allons montrer que le morphisme

$$\mathrm{H}_\bullet(\mathfrak{Q}^*_U\mathfrak{Q}_{U*}\Lambda)\otimes_{\mathrm{H}_\bullet(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda))}\Lambda\to\mathcal{C}^0_f(\pi_1(U^{\mathrm{an}},\sigma),\Lambda)\tag{48}$$

est injectif. Ceci permettra de conclure. Le choix d'un chemin reliant σ à un point rationnel $u\in U(k)$ fournit un isomorphisme de foncteurs entre $\mathfrak{Q}^*_U$ et la composition de

$$\mathbf{SmDA}(U,\Lambda)\xrightarrow{\phi_u^*}\mathbf{DA}(k,\Lambda)\xrightarrow{\mathsf{Bti}^*}\mathbf{D}(\mathbb{Q}).$$

Ce même chemin fournit aussi un isomorphisme entre les foncteurs fibres

$$\sigma^*,\,u^*:\mathbf{D}_{\widehat{\mathrm{LS}}}(U^{\mathrm{an}},\Lambda)\to\mathbf{D}(\Lambda).$$

Le morphisme (48) s'identifie alors au morphisme canonique

$$\mathsf{Bti}^*(\mathscr{F}_{\mathrm{mot}}(U,u,\Lambda))\to\mathcal{C}^0_f(\pi_1(U^{\mathrm{an}},u),\Lambda).$$

Le théorème 2.49 permet maintenant de conclure. □

A. Morphismes multivalués et correspondances finies

Les *correspondances finies* jouent un rôle important dans la théorie des motifs à la Voevodsky [13, 18]. Dans l'introduction de [16], on décrit, à p-torsion près, le groupe des correspondances finies comme étant la groupe-complétion d'un certain monoïde de *morphismes multivalués*. La notion de morphismes multivalués garde un sens dans un contexte abstrait. Pour cela, nous avions choisi dans le corps de l'article d'introduire les correspondances finies, dans les contextes : algébrique, analytique complexe et analytique rigide, via les morphismes multivalués. Cela a rendu évidentes certaines propriétés de fonctorialités. Dans cet annexe, on étudie la notion de morphisme multivalué dans un cadre abstrait et on vérifie quelques propriétés bien admises mais difficiles à trouver dans la littérature, notamment le lien entre morphismes multivalués et correspondances finies en géométrie algébrique au-dessus d'un corps de base de caractéristique nulle.

A.1. Morphismes multivalués dans une catégorie abstraite. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet les produits et coproduits directs finis. On suppose que le produit direct est *distributif* par rapport au coproduit direct, i.e., que le morphisme canonique $(A \times C) \sqcup (B \times C) \to (A \sqcup B) \times C$ est inversible pour tout $(A, B, C) \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})^3$. On note $\emptyset$ l'objet initial de $\mathcal{C}$ et $\star$ son objet final.

Une flèche $X_0 \to X$ de $\mathcal{C}$ est dite *complémentable* s'il existe une flèche $X' \to X$ de $\mathcal{C}$ telle que $X_0 \sqcup X' \to X$ est inversible. Un objet X de $\mathcal{C}$ est dit *connexe* s'il est non vide (i.e., $X \not\simeq \emptyset$) et si toute flèche complémentable $X_0 \to X$, de source X_0 non vide est inversible. On supposera que les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) Pour tout $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, les classes d'isomorphismes de flèches complémentables $X_0 \to X$ de source connexe forment un ensemble fini qu'on notera $\pi_0(X)$.

(b) Pour chaque $i \in \pi_0(X)$, on fixe une flèche complémentable $X_i \to X$ qui représente i. Alors, $\coprod_{i \in \pi_0(X)} X_i \to X$ est un isomorphisme.

(c) Pour toute flèche $u : U \to X \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ de source connexe, il existe un unique $i \in \pi_0(X)$ et une unique factorisation de u par $X_i \to X$.

La condition (c) entraîne qu'à une flèche $f : X \to Y$ correspondent une application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ et des flèches $f_i : X_i \to Y_{\pi_0(f)(i)}$. De plus, le coproduit des f_i redonne f modulo les isomorphismes de (b). On a aussi les relations $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$ et $g_{f(i)} \circ f_i = (g \circ f)_i$, avec $g : Y \to Z$ une deuxième flèche de $\mathcal{C}$. Autrement dit, on a un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des familles finies d'objets connexes de $\mathcal{C}$.

Dans la suite, chaque fois qu'on considère une représentation $(X, \phi : G \to \mathrm{aut}(X))$ d'un groupe fini G dans $\mathcal{C}$, on supposera que le quotient X/G existe dans $\mathcal{C}$ et que le produit direct y commute, i.e., que $(Y \times X)/G \to Y \times (X/G)$ est inversible pour tout $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$. Étant donné un objet X de $\mathcal{C}$, on note $\mathrm{S}^n(X)$ le quotient de X^n (produit direct de n copies de X) par le groupe symétrique Σ_n. Le foncteur $\mathrm{S}^n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ainsi obtenu, vérifie les propriétés suivantes.

Lemme A.1. *Soient m, n et p des entiers naturels.*

(a) *Il existe une transformation $\mathrm{S}^m(X) \times \mathrm{S}^n(X) \to \mathrm{S}^{m+n}(X)$ naturelle en $X \in \mathcal{C}$ et telle que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{S}^m(X) \times \mathrm{S}^n(X)) \times \mathrm{S}^p(X) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{S}^{m+n}(X) \times \mathrm{S}^p(X) \arrow[r] & \mathrm{S}^{m+n+p}(X) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{S}^m(X) \times (\mathrm{S}^n(X) \times \mathrm{S}^p(X)) \arrow[r] & \mathrm{S}^m(X) \times \mathrm{S}^{n+p}(X) \arrow[r] & \mathrm{S}^{m+n+p}(X)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^m(X) \times \mathrm{S}^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{S}^{m+n}(X) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{S}^n(X) \times \mathrm{S}^m(X) \arrow[r] & \mathrm{S}^{n+m}(X)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

(b) *Il existe une transformation* $\mathrm{S}^m(\mathrm{S}^n(X)) \to \mathrm{S}^{m\times n}(X)$ *naturelle en* $X \in \mathcal{C}$ *et telle que les carrés*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}^m \circ \mathrm{S}^n \circ \mathrm{S}^p(X) & \longrightarrow & \mathrm{S}^m \circ \mathrm{S}^{np}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{S}^{mn} \circ \mathrm{S}^p(X) & \longrightarrow & \mathrm{S}^{mnp}(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{S}^m \circ \mathrm{S}^p(X) \times \mathrm{S}^n \circ \mathrm{S}^p(X) & \longrightarrow & \mathrm{S}^{m+n} \circ \mathrm{S}^p(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{S}^{mp}(X) \times \mathrm{S}^{np}(X) & \longrightarrow & \mathrm{S}^{mp+np}(X) \end{array}$$

sont commutatifs.

(c) *Il existe une transformation* $\mathrm{S}^p(X \times Y) \to \mathrm{S}^p(X) \times \mathrm{S}^p(Y)$ *naturelle en* $(X, Y) \in \mathcal{C}^2$ *et telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}^p(\mathrm{S}^m(X) \times \mathrm{S}^n(X)) & \longrightarrow & \mathrm{S}^p \circ \mathrm{S}^m(X) \times \mathrm{S}^p \circ \mathrm{S}^n(X) & \longrightarrow & \mathrm{S}^{pm}(X) \times \mathrm{S}^{pn}(X) \\ \| & & & & \downarrow \\ \mathrm{S}^p(\mathrm{S}^m(X) \times \mathrm{S}^n(X)) & \longrightarrow & \mathrm{S}^p \circ \mathrm{S}^{m+n}(X) & \longrightarrow & \mathrm{S}^{p(m+n)}(X) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. La preuve est standard et sera omise. □

Définition A.2. Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. Un *morphisme multivalué* de X dans Y de pur degré d est une flèche $X \to \mathrm{S}^d(Y)$. On note $\mathrm{mult}_d(X, Y) = \hom_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{S}^d(Y))$ l'ensemble des morphismes multivalués de X dans Y de pure degré d, et on pose

$$\mathrm{mult}(X, Y) = \prod_{i \in \pi_0(X)} \Big(\coprod_{d \in \mathbb{N}} \mathrm{mult}_d(X_i, Y) \Big) = \coprod_{d : \pi_0(X) \to \mathbb{N}} \Big(\prod_{i \in \pi_0(X)} \mathrm{mult}_{d(i)}(X_i, Y) \Big),$$

où $X = \coprod_{i \in \pi_0(X)} X_i$ est la décomposition de X en composantes connexes. Un élément de $\mathrm{mult}(X, Y)$ est aussi appelé un *morphisme multivalué*.

Par définition, $\mathrm{mult}_0(X, Y)$ est l'ensemble des morphismes de X dans l'objet final $\star$ de $\mathcal{C}$. C'est donc un singleton. On a $\mathrm{mult}_1(X, Y) = \hom(X, Y)$. Les ensembles $\mathrm{mult}_d(\emptyset, X)$ et $\mathrm{mult}(\emptyset, X)$ sont réduits à un élément. Lorsque $X = X_1 \sqcup X_2$, on a

$$\mathrm{mult}(X, Y) = \mathrm{mult}(X_1, Y) \times \mathrm{mult}(X_2, Y).$$

On peut additionner les morphismes multivalués de pure degré de la manière suivante. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $f_i \in \mathrm{mult}_{d_i}(X, Y)$. On définit un élément $f_1 + f_2 \in \mathrm{mult}_{d_1+d_2}(X, Y)$ en composant $(f_1, f_2) : X \to \mathrm{S}^{d_1}(Y) \times \mathrm{S}^{d_2}(Y)$ avec le morphisme évident

$$\mathrm{S}^{d_1}(Y) \times \mathrm{S}^{d_2}(Y) \to \mathrm{S}^{d_1+d_2}(Y).$$

Proposition A.3. *L'ensemble* $\coprod_{d \in \mathbb{N}} \mathrm{mult}_d(X, Y)$*, muni de la loi définie ci-dessus, est un monoïde commutatif et unitaire.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence facile du lemme A.1 et des constructions. □

En utilisant la proposition A.3, on peut munir l'ensemble

$$\mathrm{mult}(X,Y) = \prod_{i\in\pi_0(X)} \Big(\coprod_{d\in\mathbb{N}} \mathrm{mult}_d(X_i,Y)\Big)$$

d'une structure de monoïde commutative et unitaire, où la somme de deux familles de morphismes multivalués $(f_i)_{i\in\pi_0(X)}$ et $(g_i)_{i\in\pi_0(X)}$ est donnée par $(f_i+g_i)_{i\in\pi_0(X)}$. On fait la définition suivante.

Définition A.4. La groupe-complétion du monoïde unitaire $\mathrm{mult}(X,Y)$ sera notée $\mathrm{abstCor}(X,Y)$. Un élément de $\mathrm{abstCor}(X,Y)$ est appelée une *correspondance abstraite*.

On peut aussi composer les morphismes multivalués de pur degré. Étant donnés $f\in\mathrm{mult}_d(X,Y)$ et $g\in\mathrm{mult}_e(Y,Z)$, on définit $g\circ f\in\mathrm{mult}_{de}(X,Z)$ par la composition de

$$X \xrightarrow{f} \mathrm{S}^d(Y) \xrightarrow{\mathrm{S}^d(g)} \mathrm{S}^d(\mathrm{S}^e(Z)) \to \mathrm{S}^{de}(Z).$$

On a clairement $f\circ\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y\circ f = f$ et $f\circ\star = \star\circ f = \star$.

Proposition A.5. *La composition des morphismes multivalués de pur degré est associative et distributive par rapport à l'addition.*

Démonstration. C'est encore une conséquence facile du lemme A.1 et des constructions. □

Pour définir la composition au niveau des ensembles $\mathrm{mult}(-,-)$, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme A.6. *Soient X, Y_1 et Y_2 des objets de $\mathcal{C}$. On pose $Y = Y_1\sqcup Y_2$ et on note $i_1 : Y_1\to Y$ et $i_2 : Y_2\to Y$ les morphismes évidents. On suppose que X est connexe. Alors pour tout entier naturel $d\in\mathbb{N}$, l'application*

$$\sigma : \coprod_{0\le c\le d} \mathrm{mult}_c(X,Y_1)\times\mathrm{mult}_{d-c}(X,Y_2) \to \mathrm{mult}_d(X,Y),$$

donnée par $\sigma(f_1,f_2) = i_1\circ f_1 + i_2\circ f_2$, est une bijection.

Démonstration. Nous allons construire un inverse à σ. Notons pour cela que le décomposition $Y = Y_1\sqcup Y_2$ induit une décomposition $\mathrm{S}^d(Y)\simeq\coprod_{0\le c\le d}\mathrm{S}^c(Y_1)\times\mathrm{S}^{d-c}(Y_2)$. (On utilise pour cela que le produit direct est distributive par rapport au coproduit direct dans $\mathcal{C}$.) Étant donné que X est connexe, tout morphisme multivalué $f : X\to\mathrm{S}^d(Y)$ se factorise d'une manière unique par une flèche $(f_1,f_2) : X\to\mathrm{S}^c(Y_1)\times\mathrm{S}^{d-c}(Y_2)$. L'association $f\rightsquigarrow(f_1,f_2)$ fournit une application $\delta : \mathrm{mult}_d(X,Y)\to\coprod_{c=0}^d\mathrm{mult}_c(X,Y_1)\times\mathrm{mult}_{d-c}(X,Y_2)$. La vérification que δ est un inverse à droite et à gauche est un exercice facile qu'on laissera au lecteur. □

Corollaire A.7. *Pour tout $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, on a un isomorphisme canonique de monoïdes unitaires :*

$$\prod_{i\in\pi_0(X),\, j\in\pi_0(Y)} \Big(\coprod_{d\in\mathbb{N}} \mathrm{mult}_d(X_i, Y_j)\Big) \simeq \mathrm{mult}(X, Y).$$

Il envoie une famille $(f_{ij})_{i\in\pi_0(X),\, j\in\pi_0(Y)}$ de morphismes multivalués sur la famille

$$\Big(\sum_{j\in\pi_0(Y)} (Y_j \to Y)\circ f_{ij}\Big)_{i\in\pi_0(X)}.$$

Soient X, Y et Z trois objets de $\mathcal{C}$. Soient $f \in \mathrm{mult}(X, Y)$ et $g \in \mathrm{mult}(Y, Z)$ et notons $(f_{ij})_{(i,j)\in\pi_0(X)\times\pi_0(Y)}$ et $(g_{jk})_{(j,k)\in\pi_0(Y)\times\pi_0(Z)}$ les familles de morphismes multivalués de pur degré qui leur correspondent respectivement via l'isomorphisme du corollaire A.7. On définit alors $g\circ f \in \mathrm{mult}(X, Z)$ comme étant l'unique élément qui correspond, via l'isomorphisme du corollaire A.7, à la famille $(\sum_{j\in\pi_0(Y)} g_{jk}\circ f_{ij})_{(i,k)\in\pi_0(X)\times\pi_0(Z)}$. On déduit immédiatement de la proposition A.5 que la composition $\mathrm{mult}(X, Y)\times\mathrm{mult}(Y, Z)\to\mathrm{mult}(X, Z)$, ainsi définie, est associative et distributive par rapport à l'addition. En particulier, on a une catégorie $\mathrm{mult}(\mathcal{C})$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et ayant pour flèches les morphismes multivalués. Par ailleurs, étant donné que cette composition est bi-additive, elle passe à la groupe-complétion des monoïdes unitaires $\mathrm{mult}(-,-)$ et fournit une application de composition

$$\mathrm{abstCor}(X, Y)\times\mathrm{abstCor}(Y, Z)\to\mathrm{abstCor}(X, Z).$$

Cette composition des correspondances abstraites est associative et distributive par rapport à l'addition. On obtient ainsi une catégorie $\mathrm{abstCor}(\mathcal{C})$ ayant les même objets que $\mathcal{C}$ et ayant pour flèches les correspondances abstraites.

Proposition A.8. *La catégorie* $\mathrm{abstCor}(\mathcal{C})$ *est additive. De plus, si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, leur somme directe dans* $\mathrm{abstCor}(\mathcal{C})$ *est représentée par $X\sqcup Y$.*

Démonstration. Ceci découle immédiatement du corollaire A.7. □

L'énoncé ci-dessous est une évidence.

Lemme A.9. *Soit $\mathcal{D}$ une seconde catégorie vérifiant les mêmes hypothèses que $\mathcal{C}$. On suppose donné un foncteur $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ qui commute aux produits et coproduits directs finis ainsi qu'aux quotients par des groupes finis. Alors F induit naturellement un foncteur additif* $\mathrm{abstCor}(F):\mathrm{abstCor}(\mathcal{C})\to\mathrm{abstCor}(\mathcal{D})$.

A.2. Lien avec les correspondances finies en géométrie algébrique. Dans cette section, nous allons comparer la notion de correspondance abstraite que l'on vient d'introduire avec celle de correspondance finie en géométrie algébrique (voir [18, Chapter 2]). Le résultat ci-dessous jouera un rôle important.

Proposition A.10. *Soient X un schéma noethérien, normal et connexe, et $f: X'\to X$ un morphisme fini et génériquement étale (i.e., étale en tout point d'un ouvert dense de X'). Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $P^n(X'/X)$ l'ouvert de $(X'/X)^n = X'\times_X\cdots\times_X X'$ (n copies de*

X'), complémentaire des immersions fermées $\delta_i : (X'/X)^{n-1} \to (X'/X)^n$ données par $\delta_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_{n-1})$ pour $1 \leq i \leq n-1$. On note aussi $\overline{P}^n(X'/X)$ l'adhérence schématique de $P^n(X'/X)$ dans $(X'/X)^n$. Le groupe Σ_n agit sur $\overline{P}^n(X'/X)$ et si d est le degré de f, le morphisme canonique $\overline{P}^d(X'/X)/\Sigma_d \to X$ est inversible.

Démonstration. L'image du morphisme $P^d(X'/X) \to X$ est formée des points $x \in X$ tels que la fibre géométrique de f en x contient au moins d points distincts. Puisque f est génériquement étale, toutes les composantes irréductibles de X' se surjectent sur X. Ceci entraîne que la fibre géométrique de f en $x \in X$ contient au plus d points distincts, et ce nombre de points est atteint si et seulement si f est étale en tout point de sa fibre en x. Autrement dit, l'image de $P^d(X'/X) \to X$ est le lieu des $x \in X$ tels que f est étale en tout point de $f^{-1}(x)$. Étant donné que f est génériquement étale, ce lieu est un ouvert dense de X que l'on notera U.

Le morphisme $P^d(X'/X) \to X$ est étale. En effet, le X-schéma $P^d(X'/X)$ est un ouvert du X-schéma $(X'/X)^n$ contenu dans $[(X'/X)^n \to X]^{-1}(U) \simeq (f^{-1}(U)/U)^n$. Par ailleurs, $(f^{-1}(U)/U)^n$ est un U-schéma étale puisqu'il en est ainsi du U-schéma $f^{-1}(U)$. Il vient alors que toute composante irréductible de $\overline{P}^d(X'/X)$ se surjecte sur X. Comme X est normal, il suffira de montrer que $\overline{P}^d(X'/X)/\Sigma_d \to X$ est inversible au-dessus d'un ouvert dense de X.

Quitte à remplacer X par U et X' par $f^{-1}(U)$, nous pouvons donc supposer que f est un revêtement étale. Dans ce cas, $P^d(X'/X) = \overline{P}^d(X'/X)$ et notre problème devient local pour la topologie étale sur X. Nous sommes alors ramenés au cas où X' est un coproduit de d copies de X. Dans ce cas, $P^d(X'/X)$ est un coproduit de $d!$ copies de X permutées simplement transitivement par Σ_d et la propriété recherchée est clairement satisfaite. □

Remarque A.11. Soit $f : X' \to X$ un morphisme fini avec X un schéma noethérien, normal et connexe et X' un schéma réduit. Lorsque le corps des fractions de X est de caractéristique nulle, les deux conditions ci-dessous sont équivalentes :

(i) f est génériquement étale (i.e., étale en tout point d'un ouvert dense de X').

(ii) Toute composante irréductible de X' se surjecte sur X.

Cette équivalence devient fausse si X est de caractéristique positive. Pour cela, nous seront obligés de nous restreindre à la caractéristique nulle dans la définition A.12 (b) ci-dessous.

Dans la suite de cette section, on fixe un corps k de caratéristique nulle. Sauf mention explicite du contraire, l'expression *k-schéma* désignera un k-schéma séparé et essentiellement de type fini, i.e., une localisation Zariski d'un k-schéma de type fini. La catégorie des k-schémas satisfait aux conditions imposées à la catégorie $\mathcal{C}$ dans la section A.1, de sorte qu'on peut parler de morphismes multivalués et de correspondances abstraites entre k-schémas.

Définition A.12. (a) Soient X un k-schéma normal et connexe, et $f : X' \to X$ un morphisme fini génériquement étale de degré d. On définit un morphisme $\rho(f) : X \to \mathrm{S}^d(X')$ par la composition de

$$X \simeq \overline{P}^d(X'/X)/\Sigma_d \to (X'/X)^d/\Sigma_d \to (X')^d/\Sigma_d = \mathrm{S}^d(X').$$

(b) Soient X et Y deux k-schémas et supposons que X est normal. Soit $Z \subset X \times_k Y$ un sous-schéma intègre, fini et surjectif sur une composante connexe X_0 de X. On note $\rho(Z)$ le morphisme multivalué de pure degré d donné par la composition de

$$X_0 \xrightarrow{\rho(f)} \mathrm{S}^d(Z) \xrightarrow{\mathrm{S}^d(g)} \mathrm{S}^d(Y),$$

avec f et g les projections de Z sur X_0 et Y respectivement, et d le degré de f. On obtient ainsi un morphisme de groupes abéliens $\mathbf{Cor}_k(X,Y) \to \mathrm{abstCor}(X,Y)$ qui à Z associe $\rho(Z)$.

Par construction, l'application ρ associe à une correspondance finie effective un morphisme multivalué. Ceci fournit un morphisme de monoïde unitaire

$$\rho : \mathbf{Cor}_k^+(X,Y) \to \mathrm{mult}(X,Y),$$

avec $\mathbf{Cor}_k^+(X,Y) \subset \mathbf{Cor}(X,Y)$ le sous-ensemble des correspondances effectives. De plus, l'homomorphisme de la définition A.12 (b) s'en déduit par passage aux groupes associés. Ceci sera utile dans la preuve du résultat suivant.

Proposition A.13. *Soient X et Y deux k-schémas normaux. Le morphisme $\rho : \mathbf{Cor}_k(X,Y) \to \mathrm{abstCor}(X,Y)$ est inversible.*

Démonstration. On montrera plus précisément que $\rho : \mathbf{Cor}_k^+(X,Y) \to \mathrm{mult}(X,Y)$ est inversible. On peut supposer que X et Y sont connexes et, en particulier, non vides. Soit $f : X \to \mathrm{S}^d(Y)$ un morphisme multivalué. On forme le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y \times_k \mathrm{S}^{d-1}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\;\;f\;\;} & \mathrm{S}^d(Y). \end{array}$$

On note $(X'_i)_{i\in I}$ la famille des composantes irréductibles de X' et m_i la multiplicité galoisienne de X'_i (voir [16, Definition 5.12]). Pour $i \in I$, on a un morphisme évident $X'_i \to X \times_k Y$ donné sur chaque facteur par les restrictions à $X'_i \subset X'$ du morphisme $X' \to X$ et de la composition de $X' \to Y \times_k \mathrm{S}^{d-1}(Y) \to Y$. On note $\underline{X}'_i$ l'image de X'_i dans $X \times_k Y$ et d'_i le degré du morphisme fini surjectif $X'_i \to \underline{X}'_i$. On définit alors une correspondance finie de X dans Y par la formule : $c(f) = \sum_{i\in I} m_i d'_i \cdot [\underline{X}'_i]$. On obtient ainsi une application $c : \mathrm{mult}(X,Y) \to \mathbf{Cor}_k^+(X,Y)$. On montrera que cette application fournit un inverse à ρ. En passant au corps des fonctions de X et en remplaçant Y par $Y \otimes_k k(X)$, on voit qu'il suffit de traiter le cas où X est le spectre d'un corps. On peut même supposer que X est le spectre d'un corps algébriquement clos k.

Soit $z : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{S}^d(Y)$ un morphisme multivalué, i.e., un k-point de $\mathrm{S}^d(Y)$. Il correspond à un 0-cycle effectif $z = \sum_{i\in I} n_i y_i$ dans Y avec $n_i > 0$ et $d = \sum_{i\in I} n_i$. La fibre en z du morphisme $Y \times \mathrm{S}^{d-1}(Y) \to \mathrm{S}^d(Y)$ est formée des couples $(y_j, (\sum_{i\in I} n_i y_i) - y_j)$ ayant pour multiplicité galoisienne n_j. On déduit immédiatement que $c(z) = \sum_{i\in I} n_i y_i$. Par ailleurs, étant donné un 0-cycle de degré d dans Y, le point $z : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{S}^d(Y)$ qui lui correspond par l'application ρ est ce 0-cycle lui même. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Notre prochaine tâche est de vérifier que l'isomorphisme de la proposition A.13 est compatible aux compositions. Pour cela, on a besoin d'une digression. Soit Y un k-schéma normal. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\gamma_d \in \mathbf{Cor}_k^+(\mathrm{S}^d(Y), Y)$ la correspondance finie effective définie à l'aide du morphisme fini $Y \times_k \mathrm{S}^{d-1}(Y) \to \mathrm{S}^d(Y)$ et de la projection sur le second facteur $Y \times_k \mathrm{S}^{d-1}(Y) \to Y$. On a le résultat suivant.

Lemme A.14. *Le carré de correspondances finies*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}^d\,\mathrm{S}^e(Y) \arrow[r, "\gamma_d"] \arrow[d] & \mathrm{S}^e(Y) \arrow[d, "\gamma_e"] \\ \mathrm{S}^{de}(Y) \arrow[r, "\gamma_{de}"] & Y. \end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout $(d, e) \in \mathbb{N}^2$. La flèche non nommée est le morphisme évident du lemme A.1 *(b).*

Démonstration. La preuve est omise. □

Proposition A.15. *L'isomorphisme $\rho : \mathbf{Cor}_k(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{abstCor}(X, Y)$ est compatible aux compositions des correspondances finies et des correspondances abstraites entre k-schémas normaux.*

Démonstration. On ne restreint pas la généralité en considérant uniquement les schémas connexes. Il suffit de montrer que l'application $c : \mathrm{mult}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Cor}_k^+(X, Y)$, construite dans la preuve de la proposition A.13, est compatible aux compositions. Soient X, Y et Z des k-schémas normaux et connexes. Soient $f \in \mathrm{mult}(X, Y)$ et $g \in \mathrm{mult}(Y, Z)$ des morphismes multivalués de purs degrés d et e respectivement. Il s'agit de vérifier que $c(g \circ f) = c(g) \circ c(f)$. Remarquons pour cela que $c(f) = \gamma_d \circ f$ et $c(g) = \gamma_e \circ f$. Or, $g \circ \gamma_d = \gamma_d \circ \mathrm{S}^d(g)$. Il vient que

$$c(g) \circ c(f) = \gamma_e \circ g \circ \gamma_d \circ f = \gamma_e \circ \gamma_d \circ \mathrm{S}^d(g) \circ f.$$

Par le lemme A.14, on a $\gamma_e \circ \gamma_d = \gamma_{de} \circ (\mathrm{S}^d\,\mathrm{S}^e(Y) \to \mathrm{S}^{de}(Y))$ alors que, par la définition même de la composition des morphismes multivalués,

$$g \circ f = (\mathrm{S}^d\,\mathrm{S}^e(Y) \to \mathrm{S}^{de}(Y)) \circ \mathrm{S}^d(g) \circ f.$$

En fin de compte, on obtient que $c(g) \circ c(f) = \gamma_{de} \circ (f \circ g) = c(f \circ g)$. La proposition est démontrée. □

Références

[1] *J. Ayoub*, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique, I, Astérisque **314**, Société Mathématique de France, 2007.

[2] *J. Ayoub*, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique, II, Astérisque **315**, Société Mathématique de France, 2007.

[3] *J. Ayoub*, Les motifs des variétés analytiques rigides, preprint (2008).

[4] *J. Ayoub*, Note sur les opérations de Grothendieck et la réalisation de Betti, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), 225–263.

[5] *J. Ayoub*, L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I, J. reine angew. Math. **693** (2014), 1–149.
[6] *J. Ayoub* and *L. Barbieri-Viale*, 1-Motivic sheaves and the Albanese functor, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 809–839.
[7] *P. Deligne* and *N. Katz*, Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Séminaire de géométrie algébrique de Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), Lecture Notes in Math. **340**, Springer, 1973.
[8] *A. Grothendieck*, Letter to Faltings, dated June 27, 1983.
[9] *A. Grothendieck* et al., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer, 1972–73.
[10] *G. Hochschild* and *G. D. Mostow*, Representations and representative functions of Lie groups, Ann. Math. **66** (1957), 495–542.
[11] *L. Illusie*, Autour du théorème de monodromie locale, in: Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette 1988), Astérisque **223** (1994), 9–57.
[12] *M. Levine*, Smooth motives, in: Motives and algebraic cycles, Fields Inst. Commun. **56**, American Mathematical Society, Providence (2009), 175–231.
[13] *C. Mazza*, *V. Voevodsky* and *C. Weibel*, Lecture notes on motivic cohomology, Clay Math. Monogr. **2**, American Mathematical Society, Providence 2006.
[14] *D.-M. Popescu*, General Néron desingularization, Nagoya Math. J. **100** (1985), 97–126.
[15] *D.-M. Popescu*, General Néron desingularization and approximation, Nagoya Math. J. **104** (1986), 85–115.
[16] *A. Suslin* and *V. Voevodsky*, Singular homology of abstract algebraic varieties, Invent. Math. **123** (1996), 61–94.
[17] *R. Vakil* and *K. Wickelgren*, Universal covering spaces and fundamental groups in algebraic geometry as schemes, preprint (2009).
[18] *V. Voevodsky*, *A. Suslin* and *E.-M. Friedlander*, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud. **143**, Princeton University Press, Princeton 2000.

Joseph Ayoub, Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, 8057 Zürich, Switzerland
e-mail: joseph.ayoub@math.uzh.ch

Eingegangen 28. April 2011, in revidierter Fassung 4. September 2012